DODATEK DO ROCZNIKA
POLSKIEGO TOWARZYSTWA
MATEMATYCZNEGO

TOM V

S. K. ZAREMBA

O CAŁKACH RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO ZWYCZAJNEGO RZĘDU PIERWSZEGO W OTOCZENIU CAŁKI OSOBLIWEJ

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

11

KRAKÓW 1931
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim; dotychczas ukazał się Tom I za rok 1922, Tom II za rok 1923, Tom III za rok 1927 i Tom IV za rok 1928.

DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM V

S. K. ZAREMBA

O CAŁKACH RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO ZWYCZAJNEGO RZĘDU PIERWSZEGO W OTOCZENIU CAŁKI OSOBLIWEJ

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

Biblioteka Jagiellońska
1003047184

KRAKÓW 1931
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim; dotychczas ukazał się Tom I za rok 1922, Tom II za rok 1923, Tom III za rok 1927 i Tom IV za rok 1928.

101760

III

Akc. Nr. 1279/31
A.

S. K. Zaremba.

O całkach równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego w otoczeniu całki osobliwej.

§ 1. Wstęp.

W pracy niniejszej zajmujemy się równaniem różniczkowem zwyczajnem rzędu pierwszego. Jest to zatem równanie postaci

(1) $$f(x, y, p) = 0,$$

gdzie zmienne x, y, p oznaczają współrzędne elementu linjowego w płaszczyźnie Euklidesowej. Jak wiadomo, elementem linjowym nazywamy układ punktu i prostej, przezeń przechodzącej; w danym razie, pierwsze dwie współrzędne — są to współrzędne Kartezjuszowskie odnośnego punktu, zaś zmienna p stanowi współczynnik kierunkowy przyporządkowanej temu punktowi prostej. Nazwę pasma jednokrotnego elementów linjowych nadajemy każdej rozmaitości elementów linjowych, będącej łukiem otwartym, lub domkniętym klasy przynajmniej $C^{(1)}$ [1]) i spełniającej identycznie związek

(2) $$dy - pdx = 0.$$

Nazwa krzywej całkowej, lub — krócej — całki, równania (1) oznacza pasmo jednokrotne elementów linjowych, z których każdy

[1]) Funkcję zaliczamy do klasy $C^{(n)}$ wtedy, i tylko wtedy, gdy posiada pochodne, względnie pochodne cząstkowe, ciągłe aż do rzędu n włącznie. W szczególności, funkcja klasy $C^{(0)}$, lub — prościej — C, jest to funkcja ciągła. Równanie zaliczamy do klasy $C^{(n)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego obie strony są funkcjami tejże klasy.

spełnia to równanie. Za *element osobliwy* równania (1) uważać będziemy element, spełniający, prócz równania (1), związki następujące:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \tag{3}$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ [1]}. \tag{4}$$

Wreszcie całka osobliwa równania (1), jest to całka, złożona w całości z elementów osobliwych tegoż równania. Wiadomo, iż klasyczne twierdzenia o egzystencji całek nie stosują się do otoczenia elementów osobliwych odnośnych równań; wskutek tego, nie dają one żadnych wiadomości o przebiegu całek w sąsiedztwie całki osobliwej. Celem niniejszej pracy jest wypełnianie wynikającej stąd luki.

Zagadnieniem tem zajmowano się dotychczas jedynie w odniesieniu do równań analitycznych. W tym zakresie udowodniono [2], iż przez każdy punkt całki osobliwej przechodzi pod pewnemi warunkami jedna i tylko jedna całka różna od niej i styczna do niej, i że całka ta jest regularnie analityczna w otoczeniu rozważanego punktu. Metoda, przytem używana, pozwala również badać ciągłość takiej całki w stosunku do warunków początkowych.

W pracy niniejszej, oprócz analogicznych badań dla przypadku funkcyj nieanalitycznych, zajmujemy się szczegółowo zależnością całki nieosobliwej od warunków początkowych, gdy te ostatnie znajdują się na całce osobliwej. W szczególności, dowodzimy ciągłości całki nieosobliwej, jako funkcji odciętej punktu styczności z całką osobliwą; wykazujemy przytem, iż odcięta ta może służyć za stałę całkowania dla pewnego obszaru, przylegającego do tej ostatniej całki i — pod nieco wyższemi założeniami regularności — znajdujemy wzór na pochodnę cząstkową funkcji całkowej względem powyższej stałej całkowania. Wzór ten wywodzi się za znanych wzo-

---

[1]) Patrz: S. K. Z a r e m b a, Sur les équations différentielles dans le plan projectif, Annales de la Société Polonaise de Mathématiqe, t. VIII (1929), str. 257—277. W podręcznikach L. B i e b e r b a c h a (Theorie der Differentialgleichungen) i E. K a m k e g o (Differentialgleichungen reeler Funktionen) ten sam termin służy do oznaczania elementów, spełniających jedynie związki (1) i (3), z pominięciem związku (4); z naszego punktu widzenia, elementy takie wypadłoby nazywać p u n k t o w o osobliwemi.

[2]) Patrz np. E. P i c a r d, Traité d'analyse, t. III, 3 wyd. (1928), str. 49. *ss.*

rów Bendixsona na pochodne cząstkowe funkcji całkowej względem warunków początkowych.

Posługujemy się dwiema metodami badania. Pierwsza z nich wymaga wprawdzie cokolwiek wyższych założeń regularności odnośnie do równania (1) (naogół $C^{(3)}$), lecz jest stosunkowo prosta i stosuje się bez różnicy do funkcyj zmiennych rzeczywistych i zespolonych. Metoda ta, sprowadzająca się także do pewnej zmiany zmiennych, jest blisko spokrewniona z metodą, dotąd używaną, stosującą się jedynie do równań analitycznych; wydaje się nam ona wszakże nieco od niej prostszą. Druga metoda stosuje się wprawdzie wyłącznie do funkcyj zmiennych rzeczywistych, lecz obniża nieco wymagany w założeniach stopień regularności badanego równania (naogół $C^{(2)}$); polega ona na bezpośredniem badaniu równania.

Wykład powyższych metod poprzedza wstęp, zawierający dwa elementarne twierdzenia pomocnicze.

§ 2. Elementarne twierdzenia pomocnicze.

G. Bouligand udowodnił twierdzenie o egzystencji funkcji uwikłanej w przypadku osobliwym [1]). Ponieważ jednak zarówno sama wypowiedź twierdzenia, jak i jego dowód, są raczej naszkicowane, i — z drugiej strony — twierdzenie to stanowi w dużej mierze podstawę niniejszej pracy, a nadto, z punktu widzenia zamierzonych przez nas zastosowań, wymaga sformułowania pewnych uzupełnień, twierdzenie to wyłożymy, wraz z dowodem, na nowo. Brzmi ono jak następuje:

Twierdzenie 1. *Niech funkcja trzech zmiennych $f(x, y, p)$ będzie klasy $C^{(2)}$ w otoczeniu jakiegoś punktu (x_0, y_0, p_0). Zakładamy, iż jest*

$$f(x_0, y_0, p_0) = 0,$$

i że zachodzi w tym punkcie związek

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0; \tag{3}$$

natomiast przyjmujemy, iż w tym samym punkcie zachodzą nierówności

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \neq 0 \tag{5}$$

[1]) „Le cas singulier des fonctions implicites et les enveloppes dans le plan" w „La revue de l'enseignement des Scienses", rok 12-ty, Nr. 119—120 (1918), str. 225 *ss.* i „Sur une notion d'équivalence locale apte à préciser certains points de la théorie des enveloppes" w „Nouvelles Annales de Mathématiques", serja 5-ta, Tom 1. (1923), str. 8—21.

oraz

$$(6) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

Wówczas istnieją takie liczby dodatnie, a, b i h, tudzież takie funkcje $\Phi_1(x, y)$ i $\Phi_2(x, y)$, że:

1°. *Eliminacja zmiennej p z równań* (1) *i* (3), *ograniczonych do obszaru* (D), *określonego przez związki*

$$(7) \qquad \begin{cases} |x - x_0| \leqq a \\ |y - y_0| \leqq b \end{cases}$$

i

$$(8) \qquad |p - p_0| \leqq h,$$

daje krzywę klasy $C^{(1)}$, postaci

$$y = \varphi(x),$$

dzielącą na dwie części obszar, określony nierównościami (7), *który oznaczamy przez (Δ) i który stanowi rzut obszaru (D) na płaszczyznę (x, y).*

2°. *W całym obszarze (D) zachodzi jeden ze związków*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} < 0,$$

lub

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} > 0.$$

W pierwszym przypadku, funkcje $\Phi_1(x, y)$ i $\Phi_2(x, y)$ są określone w tej z części, na które krzywa $y = \varphi(x)$ dzieli obszar (Δ), w której spełniona jest nierówność

$$y \geqq \varphi(x);$$

w przeciwnym przypadku natomiast, są one określone w pozostałej części obszaru (Δ), a więc w tej, gdzie jest

$$y \leqq \varphi(x).$$

W szczególności zatem funkcje te są zawsze określone na samej krzywej $y = \varphi(x)$.

3°. *Identyczne zachodzą związki*

$$(9) \qquad \begin{cases} f\{x, y, \Phi_1(x, y)\} = 0 \\ f\{x, y, \Phi_2(x, y)\} = 0 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} |\Phi_1(x, y) - p_0| \leqq h, \\ |\Phi_2(x, y) - p_0| \leqq h. \end{cases}$$

4^0. *Naodwrót, związki* (1), (7) *i* (8) *pociągają za sobą jedną z równości*

$$p = \Phi_1(x, y) \quad lub \quad p = \Phi_2(x, y).$$

5^0. *Jest identycznie*

$$\Phi_1\{x, \varphi(x)\} = \Phi_2\{x, \varphi(x)\}, \tag{10}$$

natomiast, gdy punkt (x, y) *należy do obszaru, w którym funkcje* $\Phi_1(x, y)$ *i* $\Phi_2(x, y)$ *są określone, a*

$$y \neq \varphi(x),$$

jest

$$\Phi_1(x, y) < \Phi_1\{x, \varphi(x)\} = \Phi_2\{x, \varphi(x)\} < \Phi_2(x, y). \tag{11}$$

6^0. *Funkcje* $\Phi_1(x, y)$ *i* $\Phi_2(x, y)$ *są ciągłe w całym obszarze* (*wraz z brzegiem*), *w którym są określone* (*O istnieniu pochodnych cząstkowych ciągłych do rzędu drugiego włącznie poza krzywą* $y = \varphi(x)$, *poucza klasyczna teorja funkcyj uwikłanych*).

7^0. *Gdy punkt* (x, y) *leży w tej części obszaru* (Δ), *w której określone są funkcje* $\Phi_1(x, y)$ *i* $\Phi_2(x, y)$, *lecz poza krzywą* $y = \varphi(x)$ *funkcja złożona*

$$f'_p\{x, y, \Phi_2(x, y)\}$$

ma znak zgodny z wyrażeuiem

$$f''_{p^2}(x_0, y_0, p_0),$$

natomiast funkcja

$$f'_p\{x, y, \Phi_1(x, y)\}$$

ma znak przeciwny.

8^0. *Gdy punkt* (x, y) *leży w tej części obszaru* (Δ), *w której funkcje* $\Phi_1(x, y)$, *i* $\Phi_2(x, y)$ *nie są określone, lub — w przeciwnym razie — gdy zachodzi jedna z nierówności*

$$p_0 - h < p < \Phi_1(x, y) \quad albo \quad \Phi_2(x, y) < p < p_0 + h,$$

funkcja $f(x, y, p)$ *przybiera znak zgodny ze znakiem wyrażenia* $f''_{p^2}(x_0, y_0, p_0)$, *natomiast gdy zachodzi nierówność*

$$\Phi_1(x, y) < p < \Phi_2(x, y),$$

funkcja $f(x, y, p)$ *przybiera znak przeciwny.*

D o w ó d. Z założeń wynika istnienie takich liczb dodatnich a_1, b_1 i h, takich, że jeśli tylko liczby a i b spełniają związki

$$a \leqq a_1 \quad \text{i} \quad b \leqq b_1,$$

wówczas w obszarze (D) funkcja $f(x, y, p)$ jest klasy $C^{(2)}$, a nierówności (5) i (6) są wszędzie spełnione. Przypuśćmy, iż dokonaliśmy w jakiś sposób wyboru liczb a_1, b_1 i h, czyniących zadość powyższym warunkom.

Ze względu na ciągłość, skoro tylko zachodzą nierówności $a \leqq a_1$ i $b \leqq b_1$, pochodna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$$

zachowuje w całym obszarze (D) swój znak. Jest rzeczą widoczną, iż wystarczy zbadać np. przypadek, w którym zachodzi nierówność

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} > 0, \tag{12}$$

gdyż przypadek przeciwny sprowadza się do niego przez zastąpienie funkcji $f(x, y, p)$ funkcją $-f(x, y, p)$. Zakładamy zatem chwilowo, iż nierówność (12) jest spełniona.

W powyższych warunkach, badając funkcję $f(x_0, y_0, p)$ zmiennej p w przedziale $(p_0 - h, p_0 + h)$, stwierdzamy z łatwością, iż jest

$$f(x_0, y_0, p_0 - h), \quad f(x_0, y_0, p_0 + h) > 0.$$

Teraz, ze względu na ciągłość funkcyj $f(x, y, p_0 - h)$ i $f(x, y, p_0 + h)$ dwóch zmiennych: x i y, istnieją takie liczby dodatnie, a_2 i b_2, że gdy tylko zachodzą nierówności

$$a \leqq a_2, \quad b \leqq b_2,$$

wówczas nierówności (7) pociągają za sobą związki

$$\begin{cases} f(x, y, p_0 - h) > 0, \\ f(x, y, p_0 + h) > 0. \end{cases} \tag{13}$$

Z drugiej strony, zważmy, iż, ponieważ w punkcie (x_0, y_0, p_0) zachodzi związek (3), zaś w całym obszarze (D) — o ile jest $a \leqq a_1$ i $b \leqq b_1$ — spełniona jest nierówność (12), mamy

$$f'_p(x_0, y_0, p_0 - h) < 0, \quad f'_p(x_0, y_0, p_0 + h) > 0.$$

Ze względu zatem na ciągłość tej pochodnej, istnieją takie liczby dodatnie a_3 i b_3, że gdy tylko liczby a i b są od nich odpowiednio niewiększe, jest w całym obszarze (Δ):

$$f'_p(x, y, p_0 - h) < 0, \quad f'_p(x, y, p_0 + h) > 0.$$

Nierówności te — wraz z nierównością (12) — pozwalają, na mocy rozumowania, stosowanego zwykle do dowodu klasycznego twierdzenia o funkcjach uwikłanych, twierdzić, iż, w razie spełnienia nierówności $a \leqq a_3$ i $b \leqq b_3$, istnieje funkcja, jednoznacznie określona w obszarze (Δ), którą oznaczymy przez $\Psi(x, y)$, taka, że w obszarze (D) równanie (3) równoważne jest równaniu

$$p = \Psi(x, y);$$

w szczególności, jest naturalnie

(14) $$p_0 = \Psi(x_0, y_0);$$

a w całym obszarze (Δ) zachodzą nierówności:

(15) $$p_0 - h < \Psi(x, y) < p_0 + h.$$

Eliminacja zmiennej p z równań (1) i (3), ograniczonych do obszaru (D) w założeniu, iż jest $a \leqq a_3$ i $b \leqq b_3$, daje zatem równanie postaci

$$F(x, y) = 0,$$

gdzie funkcja $F(x, y)$ jest funkcją złożoną według wzoru:

(16) $$F(x, y) = f\{x, y, \Psi(x, y)\}.$$

Ponieważ w punkcie (x_0, y_0, p_0) zachodzi związek (3), przeto — z uwagi na związek (14) — jest

$$F'_y(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0, p_0),$$

a zatem, na podstawie nierówności (6),

$$F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Na podstawie klasycznego twierdzenia o funkcjach uwikłanych, istnieją przeto liczby dodatnie a i b, niewiększe odpowiednio od liczb a_1, a_2, a_3 i b_1, b_2, b_3, takie, że w odnośnym obszarze (Δ) równanie $F(x, y) = 0$ równoważne jest równaniu postaci $y = \varphi(x)$, gdzie funkcja $\varphi(x)$ jest klasy $C^{(1)}$ (a ogólnie jest klasy $C^{(n-1)}$ gdy funkcja $f(x, y, p)$ jest klasy $C^{(n)}$) i spełnia nierówności

(17) $$y_0 - b < \varphi(x) < y_0 + b.$$

Jeżeli wówczas położymy

$$\chi(x) = \Psi\{x, \varphi(x)\},$$

będziemy mieli identyczności

$$(18) \qquad f\{x, \varphi(x), \chi(x)\} = 0$$

oraz

$$(19) \qquad f'_p\{x, \varphi(x), \chi(x)\} = 0,$$

ważne w przedziale $(x_0 - a, x_0 + a)$.

Przypuśćmy teraz, iż nadaliśmy liczbom a i b oznaczone wartości, czyniące zadość wspomnianym wyżej warunkom; pokażemy teraz, iż tak przez nas wybrane liczby a, b i h, czynią zadość — wraz z dwiema funkcjami, które niebawem skonstruujemy — warunkom twierdzenia, którego dowodem obecnie jesteśmy zajęci.

W rzeczy samej, punkt 1^0 jest już udowodniony, ponieważ z nierówności (17) wynika, iż krzywa $y = \varphi(x)$ dzieli obszar (Δ) na dwie części, określone odpowiednio nierównościami

$$y \leqq \varphi(x); \quad y \geqq \varphi(x).$$

Pierwsza część drugiego punktu twierdzenia wynika z ciągłości dotyczących pochodnych, skoro w całym obszarze (D) zachodzą nierówności (5) i (6).

Zwracamy się teraz do konstrukcji funkcyj $\Phi_1(x, y)$ i $\Phi_2(x, y)$. W tym celu zauważmy przedewszystkiem, iż — ze względu na ciągłość — funkcja $F(x, y)$ zachowuje swój znak w każdej z części, na jakie krzywa $y = \varphi(x)$ dzieli obszar (Δ), skoro miejscem geometrycznem jej zer jest właśnie ta krzywa; znak ten dla części, w której spełniona jest nierówność $y \geqq \varphi(x)$ jest zgodny ze znakiem pochodnej $f'_y(x_0, y_0, p_0)$, zaś dla pozostałej części — przeciwny. Uwzględniając przyjętą przez nas nierówność (12), możemy powiedzieć, iż, według punktu drugiego twierdzenia, mamy zdefinjować funkcje $\Phi_1(x, y)$ i $\Phi_2(x, y)$ w tej części obszaru (Δ), w której funkcja $F(x, y)$ przybiera wartości ujemne lub zerowe. Część tę oznaczymy przez (Δ'), używając symbolu (Δ'') dla określenia pozostałej części obszaru (Δ).

Niech teraz będzie (x, y) dowolny punkt obszaru (Δ'), dla którego $y \neq \varphi(x)$. Uważajmy funkcję $f(x, y, p)$ chwilowo za funkcję jednej tylko zmiennej p. Znamy obecnie jej znak w trzech punktach przedziału $(p_0 - h, p_0 + h)$, mianowicie w punktach

$$p_0 - h, \quad \Psi(x, y), \quad p_0 + h,$$

spełniających nierówność (15). W rzeczy samej: nierówności (13) pouczają nas, iż rozważana funkcja ma na krańcach przedziału wartość dodatnią; natomiast w punkcie $p = \Psi(x, y)$ jest, według identyczności (16),

$$f(x, y, p) < 0,$$

skoro punkt (x, y) znajduje się w obszarze (Δ'). Na mocy ciągłości funkcji rozważanej, istnieją zatem dwie wartości zmiennej p, które oznaczymy odpowiednio przez p_1 i p_2, spełniające nierówności

$$(20) \qquad p_0 - h < p_1 < \Psi(x, y) < p_2 < p_0 + h$$

i takie, że

$$(21) \qquad \begin{cases} f(x, y, p_1) = 0, \\ f(x, y, p_2) = 0. \end{cases}$$

Z uwagi na równoważność równania $p = \Psi(x, y)$ z równaniem (3), jest identycznie

$$(22) \qquad f'_p\{x, y, \Psi(x, y)\} = 0$$

w całym obszarze (Δ), a w szczególności w rozważanym punkcie. Stąd dalej wynika, z uwagi na związek (12), iż funkcja $f'_p(x, y, p)$, uważana za funkcję jednej tylko zmiennej p, przybiera znak $+$ w przedziale $\{\Psi(x, y), p_0 + h\}$, a znak $-$ w przedziale $\{p_0 - h, \Psi(x, y)\}$. Zatem w każdym z tych przedziałów zosobna, funkcja $f(x, y, p)$ jest monotoniczna; w szczególności, w przedziale $\{p_0 - h, \Psi(x, y)\}$ jest ona malejąca, zaś w przedziale $\{\Psi(x, y), p_0 + h\}$ — rosnąca. Wobec tego, w żadnym z tych przedziałów nie może ona mieć więcej zer, niż jedno; innemi słowy, przy danych wartościach zmiennych x i y, liczby p_1 i p_2 są jednoznacznie określone.

Połóżmy teraz

$$(23) \qquad \Phi_1\{x, \varphi(x)\} = \chi(x) \text{ i } \Phi_2\{x, \varphi(x)\} = \chi(x),$$

zaś w punktach obszaru (Δ'), nie leżących na krzywej $y = \varphi(x)$,

$$(24) \qquad \Phi_1(x, y) = p_1, \quad \Phi_2(x, y) = p_2.$$

W ten sposób, funkcje $\Phi_1(x, y)$ i $\Phi_2(x, y)$ są określone zgodnie z drugą częścią punktu drugiego twierdzenia. Łatwo też dostrzec, iż czynią one zadość punktowi trzeciemu. W rzeczy samej, gdy punkt (x, y) leży na krzywej $y = \varphi(x)$, identyczności (9) wynikają z iden-

tyczności (18), przy uwzględnieniu związku (23). Gdy zaś punkt (x, y) leży w pozostałej części obszaru (Δ'), równania (21) i (24) pokazują również, iż zachodzą identyczności (9). Nierówności zaś, stanowiące drugą część punktu trzeciego, wynikają ze związków

$$(25) \qquad p_0 - h < \Phi_1(x, y) < \Psi(x, y) < \Phi_2(x, y) < p_0 + h,$$

powstających z nierówności (20) przez podstawienie wartości (24) na funkcje $\Phi_1(x, y)$ i $\Phi_2(x, y)$.

Punkt czwarty naszego twierdzenia wynika z punktu ósmego przez kontrapozycję, przy zastosowaniu prawa trichotomji dla liczb rzeczywistych; zwracamy się zatem odrazu do punktu ósmego. Istotnie, stwierdziliśmy już poprzednio, iż funkcja $f(x, y, p)$, uważana za funkcję jednej tylko zmiennej p, jest malejąca w przedziale $\{p_0 - h, \Psi(x, y)\}$, zaś rosnąca w przedziale $\{\Psi(x, y), p_0 + h\}$, przyczem uwaga ta odnosi się nie tylko do obszaru (Δ'), lecz do całego obszaru (Δ). Wobec tego, słuszność punktu ósmego w odniesieniu do punktów obszaru (Δ'), nie leżących na krzywej $y = \varphi(x)$, wynika z udowodnionych już identyczności (9), przy uwzględnieniu nierówności (25). Słuszność zaś w odniesieniu do punktów obszaru (Δ'') wynika stąd, iż, wobec powyższej uwagi o monotoniczności funkcji $f(x, y, p)$, jest ona minimum dla wartości

$$p = \Psi(x, y),$$

przyczem minimum to jest, jak widzieliśmy, zerem na krzywej $y = \varphi(x)$, a liczbą dodatnią w pozostałej części obszaru (Δ'').

Zanim przejdziemy do punktu piątego, udowodnimy, iż spełniony jest punkt szósty. Chodzi zatem o ciągłość funkcyj $\Phi_1(x, y)$ i $\Phi_2(x, y)$ na krzywej $y = \varphi(x)$. Gdyby jednak granica którejś z tych funkcyj, kiedy punkt (x, y) zdąża do dowolnego punktu $\{x^{(1)}, \varphi(x^{(1)})\}$ wspomnianej krzywej, nie istniała, lub nie równała się wartości rozważanej funkcji w punkcie $\{x^{(1)}, \varphi(x^{(1)})\}$, a zatem $\chi(x^{(1)})$, wówczas — ze względu na ograniczoność tej funkcji, wyrażoną przez wzory (25) — zapas jej wartości w sąsiedztwie tego punktu posiadałby choć jeden punkt skupienia, $p^{(1)}$, różny od liczby $\chi(x^{(1)})$; ze względu zaś na udowodnioną już identyczność (9), byłoby na mocy ciągłości funkcji $f(x, y, p)$,

$$f\{x^{(1)} \varphi(x^{(1)}), p^{(1)}\} = 0,$$

przy

$$p^{(1)} \neq \Phi_1\{x^{(1)}, \varphi(x^{(1)})\} \text{ i } p^{(1)} \neq \Phi_2\{x^{(1)}, \varphi(x^{(1)})\},$$

co jest sprzeczne z uzasadnionym już punktem czwartym naszego twierdzenia. Punkt szósty jest zatem również uzasadniony.

W punkcie piątym, identyczność (10) wynika bezpośrednio ze wzorów (23). W celu pokazania, iż funkcje $\Phi_1(x, y)$ i $\Phi_2(x, y)$ czynię zadość również drugiej części tego samego punktu, uważamy w funkcjach tych zmienną x za parametr. Mamy zatem do czynienia z funkcjami, określonemi, i — na mocy punktu szóstego, którym się dopiero co zajmowaliśmy — ciągłemi w przedziale zamkniętym $\{\varphi(x), y_0 \pm b\}$. Funkcje te, według klasycznej teorji funkcyj uwikłanych, posiadają wewnątrz tego przedziału pochodnę, wyrażającą się wzorem:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}\Bigg|_{p=\Phi_i(x,y)}} \qquad (i = 1, 2)$$

W wyrażeniu tem, mianownik, wobec nierówności (25) i uczynionej poprzednio uwagi na temat znaku pochodnej

$$\frac{\partial f}{\partial p}$$

w przedziałach $\{p_0 - h, \Psi(x, y)\}$ oraz $\{\Psi(x, y), p_0 + h\}$, jest ujemny dla $i = 1$, a dodatni dla $i = 2$. Licznik zaś zachowuje swój znak. Jeżeli znak ten jest $+$, pochodna

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}$$

jest dodatnia dla $i = 1$, a ujemna dla $i = 2$; funkcja $\Phi_1(x, y)$ jest zatem rosnąca, zaś $\Phi_2(x, y)$ — malejąca. Wówczas jednak — ze względu na udowodniony już punkt drugi twierdzenia i na założenie, wyrażające się nierównością (12) — mamy do czynienia z przedziałem $\{\varphi(x), y_0 - b\}$, przyczem, jak widzieliśmy, zachodzi nierówność (17); mamy więc, przy uwzględnieniu identyczności (23), nierówności (11). Jeżeli zaś jest

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0,$$

wówczas pochodne badanych funkcyj mają znaki przeciwne, a więc funkcja $\Phi_1(x,y)$ jest malejąca, a $\Phi_2(x,y)$ — rosnąca, lecz są one określone w przedziale $\{\varphi(x), y_0 + b\}$; z nierówności (17) wnosimy znowuż, przy uwzględnieniu identyczności (23), iż nierówności (11) są spełnione.

Punkt siódmy wreszcie jest bezpośrednim wnioskiem z uwagi, uczynionej poprzednio na temat znaku, jaki przybiera pochodna

$$f'_p(x, y, p),$$

brana za funkcję jednej tylko zmiennej p w przedziałach

$$\{p_0 - h, \Psi(x,y)\} \text{ i } \{\Psi(x,y), p_0 + h\}$$

(znuważając, że, w razie jeśli nie zachodzi nierówność (12), znaki są przeciwne), przy uwzględnieniu nierówności (26). W ten sposób, twierdzenie 1. jest całkowicie udowodnione.

Twierdzenie 2. — *Niech funkcje $\mu(u,v)$ i $\nu(u,v)$ będą klasy $C^{(n+1)}$ w otoczeniu jakiegoś punktu (u_0, v_0). Niech będzie prócz tego*

$$\nu(u_0, v_0) = 0; \quad \nu'_u(u_0, v_0) \neq 0.$$

Oznaczmy dalej przez $\sigma(v)$ funkcję, rozwiązującą równanie

$$\nu(u, v) = 0$$

w otoczeniu punktu (u_0, v_0); funkcja taka istnieje według klasycznego twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Załóżmy teraz, iż jest identycznie

$$\mu\{\sigma(v), v\} = 0.$$

Połóżmy wreszcie

$$\left| \begin{array}{l} \omega(u,v) = \dfrac{\mu(u,v)}{\nu(u,v)} \quad \text{dla} \quad u \neq \sigma(\nu) \\ \omega\{\sigma(v), v\} = \dfrac{\mu'_u\{\sigma(v), v\}}{\nu'_u\{\sigma(v), v\}}; \end{array} \right.$$

powiadamy iż funkcja $\omega(u,v)$ jest wówczas klasy $C^{(n)}$ w otoczeniu punktu (u_0, v_0).

Elementarne to twierdzenie stanowi uogólnienie twierdzenia, znanego pod nazwą reguły *de l'Hôpital*'a; ponieważ nie spotkaliśmy się z niem w żadnej ze znanych nam publikacyj, uważamy za konieczne podać jego dowód. Przedtem wszakże zwrócimy uwagę na lemat następujący:

L e m a t. — Niech funkcje $\mu(u, v)$ i $\nu(u, v)$ będą klasy przynajmniej $C^{(1)}$ w otoczeniu punktu (u_0, v_0). Niech będzie prócz tego identycznie

$$\mu\{\sigma(v), v\} = 0 \quad \text{i} \quad \nu\{\sigma(v), v\} = 0,$$

ale

$$\nu(u, v) \neq 0 \quad \text{gdy} \quad u \neq \sigma(v),$$

przyjmując, iż funkcja $\sigma(v)$, przynajmniej ciągła, określona jest w otoczeniu wartości v_0 zmiennej niezależnej i spełnia związek

$$\sigma(v_0) = u_0.$$

Jeżeli wówczas iloraz

$$\frac{\mu'_u(u, v)}{\nu'_u(u, v)}$$

posiada granicę na krzywej $u = \sigma(v)$, wówczas iloraz

$$\frac{\mu(u, v)}{\nu(u, v)}$$

posiada na wspomnianej krzywej tę samą granicę.

Jest to także uogólnienie reguły *de l'Hôpital'a*, różniące się od jej klasycznej postaci tylko wprowadzeniem drugiej zmiennej, v. Ponieważ dowód jest taki sam, jak w klasycznym przypadku jednej zmiennej niezależnej, pomijamy go całkowicie.

D o w ó d t w i e r d z e n i a 2. — Zauważmy przedewszystkiem, iż, dla $n = 0$, twierdzenie nasze jest zawarte w powyższym lemacie. Przechodząc do przypadku, kiedy liczba n jest większa od zera, zauważymy na wstępie, iż poza krzywą $u = \sigma(v)$ funkcja $\omega(u, v)$ jest, oczywiście, klasy $C^{(n+1)}$, wobec czego, twierdzenie nasze będzie udowodnione, jeżeli pokażemy, iż pochodne cząstkowe funkcji $\omega(u, v)$ do rzędu n włącznie posiadają granice skończone na wspomnianej krzywej $u = \sigma(v)$. Ze względu zaś na to, że jeśli funkcje $\mu(u, v)$ i $\nu(u, v)$ spełniają warunki twierdzenia przy jakiejś wartości na n, wówczas spełniają je również dla wszystkich wartości mniejszych, możemy, dzięki zasadzie indukcji, dowód ograniczyć do istnienia granic skończonych n-tych pochodnych cząstkowych, i to w założeniu, iż pochodne cząstkowe wszystkich niższych rzędów posiadają analogiczne granice.

Można łatwo stwierdzić zapomocą indukcji, iż, poza krzywą $u = \sigma(v)$, każda z rozważanych pochodnych cząstkowych rzędu n

może być przedstawiona w postaci ułamka o mianowniku równym $[\nu(u, v)]^{n+1}$, zaś liczniku, stanowiącym wielomian jednorodny stopnia $n+1$ względem funkcyj $\mu(u, v)$ i $\nu(u, v)$, tudzież ich pochodnych cząstkowych do rzędu n włącznie, przyczem w każdym jednomianie składowym suma rzędów pochodnych cząstkowych wynosi n. Na krzywej $u = \sigma(v)$ mianownik tego ułamka widocznie się zeruje, zobaczymy jednak zaraz, że i licznik musi być zerem. W przeciwnym bowiem razie iloczyn naszej pochodnej przez wyrażenie $[u - \sigma(v)]^{n+1}$ zdążałby dla $n \rightarrow \sigma(v)$ do granicy różnej od zera, ale wówczas, według elementów rachunku całkowego, pochodna cząstkowa funkcji $\omega(u, v)$ rzędu o jeden niższego w stosunku do zmiennej u, stawałaby się nieskończoną na krzywej $u = \sigma(v)$, co jednak wykluczyliśmy.

Rozumowanie powyższe nie dotyczy, naturalnie pochodnej

$$\frac{d^n\omega}{dv^n}.$$

Jeżeli jednak jest

$$\nu'_v(u_0, v_0) \neq 0,$$

wówczas obie zmienne niezależne grają tę samą rolę, a krzywa $u = \sigma(v)$ może być także przedstawiona w postaci $v = \tau(u)$. Zauważyć w związku z tem należy, iż, ponieważ związek $\nu(u, v) = 0$ pociąga za sobą $\mu(u, v) = 0$, zachodzi na krzywej

$$\nu(u, v) = 0$$

następujący związek:

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} \cdot \frac{\partial\nu}{\partial u} - \frac{\partial\mu}{\partial u} \cdot \frac{\partial\nu}{\partial v} = 0,$$

skąd, w razie spełnienia wyżej wspomnianej nierówności, wynika

$$\frac{\dfrac{\partial\mu}{\partial u}}{\dfrac{\partial\nu}{\partial u}} = \frac{\dfrac{\partial\mu}{\partial v}}{\dfrac{\partial\nu}{\partial v}},$$

wobec czego funkcja $\omega(u, v)$ może być na tej samej krzywej zdefinjowana wzorem

$$\omega\{u, \tau(u)\} = \frac{\mu'_v\{u, \tau(u)\}}{\nu'_v\{u, \tau(u)\}}.$$

Trudność, wynikającą w przypadku, kiedy zachodzi związek

$$\nu'_v(u_0, v_0) = 0,$$

usuwamy przez stosowną zmianę zmiennych, np.

$$\begin{cases} u = x + y; \\ v = x - y. \end{cases}$$

Wobec tego, iż zarówno licznik, jak i mianownik wyrażenia, przedstawiającego rozważaną pochodnę cząstkową rzędu n funkcji $\omega(u, v)$, zerują się na krzywej $u = \sigma(v)$, istnienie granicy tego wyrażenia na dopiero co wymienionej krzywej sprowadza się, na mocy lematu, do istnienia granicy ilorazu pochodnych cząstkowych licznika i mianownika względem zmiennej u. Licznik nowego wyrażenia, które otrzymujemy w ten sposób, jest wielomianem jednorodnym stopnia $n+1$ względem funkcyj $\mu(u, v)$ i $\nu(u, v)$ oraz ich pochodnych cząstkowych do rzędu $n+1$ włącznie, przyczem w każdym jednomianie składowym suma rzędów pochodnych cząstkowych równa się $n+1$; mianownik zaś ma kształt:

$$(u+1)\ \nu'_u(u, v)\ [\nu(u, v)]^n.$$

Rozbijmy teraz licznik na wyrazy, zawierające pochodne cząstkowe rzędu $n+1$ i na sumę pozostałych wyrazów. Z tego co powiedzieliśmy, wynika, iż każdy z tych pierwszych wyrazów jest iloczynem jednej z pochodnych cząstkowych rzędu $n+1$ przez iloczyn postaci

$$[\mu(u, v)]^k\ [\nu(u, v)]^{n-k},$$

gdzie liczba k zawarta jest między zerem a liczbą n; widać natychmiast, iż wyraz taki, podzielony przez mianownik, zdąża do granicy skończonej dla $u \to \sigma(v)$. Pozostaje zatem do zbadania suma pozostałych wyrazów licznika. Przedewszystkiem musi ona być zerem dla $u = \sigma(v)$, w przeciwnym bowiem razie, rozważana pochodna funkcji $\omega(u, v)$ pomnożona przez $[u - \sigma(v)]^n$, zdążałaby, dla $u \to \sigma(v)$ do granicy różnej od zera, co, ze względów poprzednio wyłuszczonych, jest wykluczone. Wobec tego zaś, kwestja istnienia granicy tej cześci rozważanego ułamka, jaka nam jeszcze pozostała, sprowadza się znowuż do granicy ilorazu pochodnych cząstkowych względem zmiennej u licznika i mianownika, przyczem pochodne te, jak widać, istnieją i pochodna licznika wyraża się zapomocą funkcyj $\mu(u, v)$ i $\nu(u, v)$ i ich pochodnych cząstkowych do rzędu $n+1$

włącznie, zaś pochodna mianownika jest równoważna wyrażeniu

$$\nu(n-1)\ [\nu'_u(u,v)]^2\ [\nu(u,v)]^{n-1}.$$

Postępując dalej, podobnie, jak dotychczas, a więc oddzielając wciąż, zdążające widocznie do skończonej granicy, części ułamka odpowiadające tym wyrazom licznika, które zawierają pochodne cząstkowe rzędu $n+1$ i różniczkując kolejno liczniki i mianowniki pozostałych części (przyczem, o ileby chodziło o efektywne przeprowadzenie rachunków, zastępowalibyśmy każdorazowo otrzymany mianownik przez równoważne mu wyrażenie, powstające z niego przez odrzucenie wyrazu nieskończenie małego wyższego rzędu) — otrzymamy w końcu ułamek o mianowniku, równoważnym wyrażeniu

$$n!\ [\nu'_u(u,v)]^n,$$

a więc nie znikającym. Wobec tego, cały ułamek, przedstawiający rozważaną pochodnę cząstkową rzędu n funkcji $\omega(u,v)$, zdąża do granicy skończonej. Wobec tego, twierdzenie jest udowodnione.

§ 3. Sprowadzenie równania $f(x,y,p)=0$ do równania $p'=H(x,p)$.

Zwracając się do właściwego przedmiotu naszych badań, zakładamy, iż w otoczeniu jakiegoś elementu (x_0, y_0, p_0) funkcja $f(x,y,p)$ jest klasy przynajmniej $C^{(2}$ oraz spełnia w tym punkcie nierówności (5) i (6), a nadto, iż przez punkt ten przechodzi całka osobliwa równania (1). Całka ta spełnia zatem identycznie związki (1), (2), (3) i (4). Równanie jej niechaj będzie

$$y=\varphi(x).$$

Zauważyć tutaj można, iż założenia powyższe zawierają w sobie założenia twierdzenia 1. i funkcja $\varphi(x)$ ma to samo znaczenie, co w tem twierdzeniu; założenia tego twierdzenia uzupełnione są jedynie warunkiem, iż na krzywej $y=\varphi(x)$ ma być spełniona identyczność (4), która, wobec związku

$$\varphi'(x) = -\left.\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\right|_{\substack{y=\varphi(x)\\ p=\chi(x)}}$$

przybiera postać

$$\chi(x)=\varphi'(x).$$

Z twierdzenia 1. nie będziemy jednak w tym paragrafie korzystali.

Oznaczenie założeń. *Założenia powyższe będziemy oznaczali przez* (S_2); *te same założenia, uzupełnione warunkiem, aby w rozważanem otoczeniu funkcja* $f(x, y, p)$ *była klasy ogólnie* $C^{(n)}$ *oznaczać będziemy przez* (S_n).

Definicja. *Całką nieosobliwą jakiegoś równania różniczkowego nazwiemy całkę, w skład której albo nie wchodzą żadne elementy osobliwe tego równania, albo wchodzą tylko elementy osobliwe izolowane na niej. Całką zaś mieszaną nazwiemy całkę, złożoną ze skończonej liczby łuków, stanowiących całki osobliwe, lub nieosobliwe danego równania.*

Twierdzenie 3. *W założeniach* (S_2), *każda całka równania* (1) *jest w otoczeniu elementu* (x_0, y_0, p) *całką osobliwą lub mieszaną tego równania.*

Twierdzenie to zawarte jest w lemacie następującym:

Lemat 1. *W założeniach* (S_2), *istnieje przedział właściwy, zawierający w swem wnętrzu punkt* $x = x_0$, *taki że, jeśli jakaś całka równania* (1) *w dwóch punktach,* $x = x_1$ *i* $x = x_2$, *tego przedziału jest styczną do całki* $y = \varphi(x)$, *wówczas całka ta w całym przedziale* (x_1, x_2) *identyczna jest z całką osobliwą.*

Dla dowodu zauważmy, iż równanie (1), rozpatrywane jako równanie zwyczajne (a nie różniczkowe), daje się w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0, p_0), według klasycznej teorji funkcyj uwikłanych, rozwiązać względem zmiennej y. Niechaj będzie

$$y = U(x, p)$$

to rozwiązanie; zmienne x i p mogą zatem uchodzić za parametry punktu powierzchni $f(x, y, p) = 0$ w otoczeniu punktu (x_0, y_0, p_0). Mamy też lemat natępujący.

Lemat 2. *Połóżmy*

$$H(x, p) = \begin{cases} -\left.\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}\right|_{y=U(x,p)} & \text{dla } p \neq \varphi'(x), \\[2ex] -\left.\dfrac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial p} + p\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial p} + \dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2}}\right|_{y=U(x,p)} & \text{dla } p = \varphi'(x), \end{cases}$$

Wówczas, w założeniach (S_n), *funkcja* $H(x, p)$ *jest klasy* $C^{(n-2)}$ *w pewnem otoczeniu punktu* (x_0, p_0).

Dostrzegamy bowiem, iż są spełnione wszystkie warunki twierdzenia 2 z podstawieniem $n-2$ zamiast n.

W szczególności zatem, w warunkach (S_2), funkcja $H(x,p)$ jest ciągła, a więc ograniczona. Ale, różniczkując równanie (1), widzimy, iż każda całka tego równania, poza, być może, elementami, należącemi do całki osobliwej, spełnia równanie

$$p' = H(x, p); \tag{26}$$

zatem druga pochodna poza całką osobliwą jest ograniczona. Ponieważ zaś to samo ma miejsce i na całce osobliwej, widać, iż zarówno pierwsza pochodna dowolnej funkcja całkowej, jak i różnica

$$p - \varphi'(x)$$

spełniają, jako funkcje zmiennej niezależnej x, warunek Lipschitza

Całka osobliwa spełnia mianowicie związek

$$\varphi''(x) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial p} + p\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial p}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2}}. \tag{27}$$

Wobec definicji funkcji $H(x,p)$, wartość ta pochodnej p' jest od niej w punkcie (x_0, p_0) różna, ze względu zatem na ciągłość obu wchodzących w grę wyrażeń, istnieje otoczenie punktu (x_0, p_0), w którem one są stale różne. Ponieważ zaś różnica $p - \varphi'(x)$ na dowolnej całce spełnia warunek Lipschitza, łatwo znaleść przedział właściwy (δ), zawierający w swem wnętrzu punkt $x = x_0$, taki, że jeśli jakaś całka jest styczna do całki $y = \varphi(x)$ w jakimś punkcie, odpowiadającym wartości zmiennej niezależnej, zawartej w tym przedziale, to całka ta, a raczej jej rzut na płaszczyznę (x, p), w całym przedziale (δ) nie wykroczy poza wspomniane otoczenie punktu (x_0, p_0).

Powiadamy, iż przedział (δ) czyni zadość warunkom lematu 1. Istotnie, w przeciwnym razie zawierałby on dwa punkty, $x = x_1$ i $x = x_2$, w których jakaś całka równania (1) byłaby styczną do całki $y = \varphi(x)$, nie będąc z nią identyczna w całym przedziale (x_1, x_2). Ale wówczas znalazłby się wewnątrz tego przedziału punkt $x = x_3$, dla którego różnica $|p - \varphi'(x)|$ (gdzie przez p oznaczyliśmy po-

chodnę rozważanej całki, różnej od całki osobliwej) byłaby maximum; w punkcie tym, wbrew założeniom, byłoby jednak na naszej całce

$$p' = \varphi''(x).$$

Lemat 1. jest zatem udowodniony; dowód, jak widać, daje się łatwo uogólnić na funkcje analityczne.

Ze względu na sposób, w jaki powstają całki mieszane, nie będziemy się niemi dalej zajmowali; a że w sąsiedztwie elementu (x_0, y_0, p_0) niema innej całki osobliwej, jak tylko całka $y = \varphi(x)$, która jest dobrze znana, zwracamy się wyłącznie do całek nieosobliwych. Punktem wyjścia jest twierdzenie następujące:

Twierdzenie 4. — *W założeniach* (S_2), *warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby pasmo jednokrotne elementów linjowych*

$$y = y(x), \quad p = p(x),$$

określone w otoczeniu elementu (x_0, y_0, p_0), *stanowiło całkę nieosobliwą równania* (1) *jest to, aby funkcja* $p(x)$ *była całką równania* (26) *i aby spełniona była identyczność* $y = U(x, p)$. *W ten sposób całki nieosobliwe równania* (1) *i całki równania* (26) *odpowiadają sobie wzajemnie w sposób jednoznaczny.*

Dowód. Zauważyliśmy już, iż każda całka równania (1) spełnia w swych elementach nieosobliwych równanie (26). Ponieważ zaś na całce nieosobliwej elementy osobliwe są izolowane, i w nich również, na mocy ciągłości, spełnione jest równanie (26). Warunek, wymieniony w twierdzeniu, jest więc konieczny.

Niech teraz, naodwrót, $p(x)$ będzie całką równania (26). Połóżmy wówczas

$$y(x) = U\{x, p(x)\}. \tag{28}$$

Powiadamy, iż wówczas pasmo, określone przez funkcje $y(x)$ i $p(x)$ stanowi całkę równania (1). W rzeczy samej, według § 1. wystarczy pokazać, iż czyni ono zadość identycznie związkom (1) i (2). Otóż spełnienie związku (1) wynika ze związku (28). Aby teraz otrzymać związek (2), różniczkujmy stronami związek (28); otrzymujemy

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} + p'(x)\frac{\partial U}{\partial p},$$

a dalej, uwzględniając, iż $p'(x)$ spełnia równanie (26), i wstawiając za pochodne cząstkowe funkcji $U(x, p)$ i za funkcję $H(x, p)$, ich wartości, otrzymujemy

$$\frac{dy(x)}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}+\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+p(x)\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=p(x),$$

w założeniu jednak, iż $p \neq \varphi'(x)$. Związek (2), przez ciągłość, zachodzi jednak i w tym przypadku, co zresztą można bezpośrednio sprawdzić rachunkiem, uwzględniając, iż związek (28) zróżniczkowany przybiera wówczas prostszą postać

$$\frac{dy(x)}{dx}=\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

skąd, z uwagi na identyczność (4), zachodzącą na całce osobliwej, wynika związek (2). Twierdzenie jest zatem całkowicie udowodnione.

Ponieważ w założeniach (S_2) funkcja $H(x, p)$ jest ciągła i określona w otoczeniu punktu (x_0, p_0), na zasadzie twierdzenia o egzystencji całek równania rozwiązanego względem pochodnej, z poprzedniego twierdzenia wynika następujące:

Twierdzenie 5. — *W założeniach S_2 przez element (x_0, y_0, p_0) przechodzi przynajmniej jedna całka nieosobliwa równania* (1).

Innemi słowy:

W założeniach (S_2), przez punkt (x_0, y_0) przechodzi przynajmniej jedna całka nieosobliwa równania (1), *styczna w tym punkcie do całki osobliwej $y = \varphi(x)$.*

Według twierdzenia 4 i określenia funkcji $H(x, p)$ na całce osobliwej, mamy, w elemencie (x_0, y_0, p_0) związek

$$p'=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p}+p\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial p}+\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}}. \tag{29}$$

Porównując ten związek ze związkiem (27), otrzymujemy, przy uwzględnianiu związku (7), twierdzenie następujące:

Twierdzenie 6. — *W założeniach (S_2), każda całka nieosobliwa równania* (1), *przechodąca przez element (x_0, y_0, p_0), ma z całką osobliwą $y = \varphi(x)$ kontakt rzędu pierwszego.*

Ponieważ dalej w warunkach (S_3), według lematu 2, funkcja

$H(x, p)$ jest klasy $C^{(1)}$, mamy, według klasycznego twierdzenia o jednotliwości całki, twierdzenie następujące:

Twierdzenie 7'. — *W założeniach* (S_3), *przez element* (x_0, y_0, p_0) *przechodzi najwyżej jedna całka nieosobliwa równania* (1).

Metoda, którą stosujemy w niniejszym paragrafie, pozwoliłaby udowodnić to samo twierdzenie w nieco skromniejszych warunkach. Jeżeli np. przyjąć, iż spełnione są założenia (S_2), a nadto pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji $f(x, y, p)$ spełniają warunek Lipschitza względem każdej ze zmiennych, możnaby udowodnić, iż funkcja $H(x, p)$ spełnia również warunek Lipschitza względem obu zmiennych, skąd wynikałaby już jednotliwość całki nieosobliwej. Ponieważ jednak sprawę tę w najszerszych warunkach, mianowicie (S_2), uda się nam rozstrzygnąć dopiero metodą bezpośredniego badadania równania (1), którą wyłożymy w następnym paragrafie, rezygnujemy ze szczegółowego przeprowadzenia odnośnego, dość kłopotliwego dowodu.

Z uwagi na lemat 2 i na twierdzenie 4 mamy dalej twierdzenie następujące:

Twierdzenie 8. — *W założeniach* (S_n) *całka nieosobliwa, przechodzaca przez element* (x_0, y_0, p_0) *jest w otoczeniu tego elementu klasy* $C^{(n)}$.

Równanie (26) jest bowiem klasy $C^{(n-2)}$ zatem funkcja $p(x)$, jako całka tegoż, jest klasy $C^{(n-1)}$, a w końcu funkcja $y(x)$, ze względu na identyczność (2), jest klasy $C^{(n)}$, c. b. d. o.

Wobec tego, iż spełnienie warunków (S_n) przez punkt (x_0, y_0) całki osobliwej $y = \varphi(x)$ pociąga za sobą spełnienie tych samych warunków przez wszystkie punkty tej całki, położone w pewnem jego otoczeniu, twierdzenia 5 i 7' mogą być sformułowane, jak następuje:

W założeniach (S_3), *przez każdy punkt całki osobliwej* $y = \varphi(x)$, *położony w pewnem otoczeniu punktu* (x_0, y_0), *przechodzi jedna i tylko jedna całka nieosobliwa równania* (1), *styczna do całki osobliwej.*

Wobec powyższego, jest rzeczą zrozumiałą, iż zwracamy się, w założeniach (S_3), do badania zależności tej całki od warunków początkowych. Oznaczymy przez $p(x; x_1, p_1)$ całkę równania (26), przechodzącą przez punkt (x_1, p_1), zaś przez $y(x; x_1, y_1)$ całkę równania (1), przechodzącą przez punkt (x_1, y_1) i odpowiadającą którejś gałęzi rozwiązania równania (1) względem zmiennej p.

Na mocy odpowiedniości wzajemnej całek równań (1) i (26)

mamy

$$(30)\qquad \frac{\partial y(x;\, x_1, y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial p(x;\, x_1, p_1)}{\partial p_1} \cdot \frac{\left.\frac{\partial U}{\partial p}\right|_{p=p(x;\, x_1, p_1)}}{\left.\frac{\partial U}{\partial p}\right|_{\substack{x=x_1\\ p=p_1}}}$$

Ponieważ jednak przy $p = \varphi'(x)$ jest

$$\frac{\partial U}{\partial p} = 0,$$

a pierwszy czynnik z prawej strony ma wartość stale od zera różną, pochodna ta (mogąca zresztą być wówczas zrozumiana tylko jako pochodna jednostronna; patrz twierdzenie 1.), gdy punkt (x_1, y_1) znajduje się na całce osobliwej, staje się nieskończoną. Jeżeli w punkcie (x_1, y_1), położonym na całce osobliwej, zachodzi nierówność $f'_x \neq 0$, to i pochodna jednostronna

$$\frac{\partial y(x;\, x_1, y_1)}{\partial x_1}$$

jest w tym punkcie nieskończona.

Natomiast ze względu na ciągłość rozwiązań równania $y = U(x, p)$ (wynikającą, m. i. z twierdzenia 1, lecz dającą się stwierdzić także niezależnie od niego) względem zmiennej p, funkcja $y(x; x_1, y_1)$ jest ciągłą względem parametrów x_1 i y_1, nawet na całce osobliwej.

Rozpatrując wciąż równanie (26), dostrzegamy odrazu, iż każda całka równania (1), przechodząca przez jakiś element, położony w sąsiedztwie elementu (x_0, y_0, p_0) jest styczną do całki osobliwej $y = \varphi(x)$ w jakimś punkcie, położonym w sąsiedztwie punktu (x_0, y_0). Wobec tego, możemy określać warunki początkowe całek nieosobliwych, przechodzących w sąsiedztwie elementu (x_0, y_0, p_0) zapomocą odciętej punktu styczności z całką osobliwą. Niechaj zatem będzie $y(x, \xi)$ całka nieosobliwa równania (1), przechodząca przez element $\{\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)\}$, zaś $p(x, \xi)$ — całka równania (26), przechodząca przez punkt $\{\xi, \varphi'(\xi)\}$. Mamy wówczas, według twierdzenia 4,

$$y(x, \xi) = U\{x, p(x, \xi)\}.$$

Ponieważ funkcja $p(x, \xi)$ w naszych założeniach, jest, na zasadzie znanych twierdzeń, dotyczących całek równań, rozwiązanych względem pochodnej, klasy $C^{(1)}$ ze względu na obie zmienne, widać stąd,

iż funkcja $y(x, \xi)$ posiada również pochodnę ciągłą względem parametru ξ, wyrażającą się wzorem

$$\frac{\partial y(x, \xi)}{\partial \xi} = U'_p\{x, p(x, \xi)\} \cdot p'_\xi(x, \xi). \tag{31}$$

Wzór ten, w razie efektywnej znajomości danej całki, pozwala wyrazić, również efektywnie, dotyczącą pochodnę. Na pochodnę tę otrzymamy wszakże później nieco dogodniejszy wzór. Narazie zauważamy jeszcze, iż ze wzoru (31) wynika, naodwrót, istnienie pochodnych cząstkowych ciągłych odciętej (a, temsamem, i rzędnej) punktu styczności z całką osobliwą całki nieosobliwej w zależności od współrzędnych punktu początkowego na całce nieosobliwej, o ile punkt ten nie znajduje się na całce osobliwej, łatwo bowiem sprawdzić, iż otrzymana pochodna jest wówczas od zera różna.

Zarówno wzór (30), jak i wzór (31) znajdują zastosowanie w pewnem uogólnieniu znanego wzoru Bendixsona na pochodne cząstkowe funkcji całkowej względem warunków początkowych. Gdy bowiem na rozważanej całce równania (1) punkty: początkowy (x_1, y_1) i bieżący (x, y) przedzielone są przez punkt styczności z całką osobliwą, klasyczne twierdzenia o całce, jako funkcji warunków początkowych, nie dają się stosować, a znany wzór Bendixsona, przybierający dla równania nierozwiązanego względem pochodnej kształt:

$$\frac{\partial y(x; x_1, y_1)}{\partial y_1} = e^{-\int \frac{f'_y}{f'_p}\Big|_{\substack{x=u \\ y=y(u; x_1, y_1) \\ p=y'_x(u; x_1, y_1)}} du}, \tag{32}$$

traci sens, gdyż funkcja podcałkowa w wykładniku prawej strony zachowuje się w otoczeniu punktu styczności z całką osobliwą podobnie, jak wyrażenie

$$\frac{1}{u - \xi},$$

gdzie ξ oznacza odciętę tego punktu. Natomiast wzór (30), zachowujący swoją ważność i w tym przypadku, upewnia nas o istnieniu pochodnej cząstkowej ciągłej. Do tego samego wniosku doszlibyśmy zresztą, opierając się na wzorze (31) i uważając końcową wartość zmiennej y za funkcje jej wartości początkowej, y_1, za pośrednictwem zmiennej ξ, posiadającej, jak zauważyliśmy, pochodnę cząstkową względem parametru y_1.

Pokażemy teraz, w jaki sposób można efektywnie wyrazić omawianą pochodnę przez uogólnienie wzoru (32) (Bendixsona). Bez szkody dla ogólności, możemy przyjąć

$$x_1 < \xi < x.$$

Niech teraz będą x_2 i x_3 dwie liczby, spełniające związki

$$x_1 < x_2 < \xi < x_3 < x \text{ oraz } x_2 + x_3 = 2\xi.$$

Wówczas, kładąc

$$y(x_2; x_1, y_1) = y_2, \quad y(x_3; x_1, y_1) = y_3,$$

mamy

$$y'_{y_1}(x; x_1, y_1) = y'_{y_3}(x; x_3, y_3) \cdot y'_{y_2}(x_3; x_2, y_2) \cdot y'_{y_1}(x_2; x_1, y_1).$$

Kładąc dalej

$$p(x_2; x_1, y_1) = p_2, \quad p(x_2; x_2, p_2) = p_3,$$

otrzymujemy, według wzoru (30),

$$y'_{y_2}(x_3; x_2, y_2) = p'_{p_2}(x_3; x_2, p_2)\, \frac{U'_p(x_3; p_3)}{U'_p(x_2; p_2)}.$$

Łatwo teraz zrozumieć, że jeśli $x_2, x_3 \to \xi$, wówczas

$$p'_{p_2}(x_3; x_2, p_2) \to 1$$

oraz, ze względu na związek $x_2 + x_3 = 2\xi$,

$$\frac{U'_p(x_3, p_3)}{U'_p(x_2, p_2)} \to -1,$$

a więc

$$y'_{y_2}(x_3; x_2, y_2) \to -1.$$

Wobec tego, stosując wzór (32) do pochodnych

$$y'_{y_3}(x; x_3, y_3) \text{ i } y'_{y_1}(x_2; x_1, y_1),$$

otrzymujemy w granicy

$$\text{(33)} \qquad \frac{\partial y(x; x_1, y_1)}{\partial y_1} = -e^{-\int\limits_{x_1}^{x} \frac{f'_y}{f'_p} \Big|_{\substack{x=u \\ y=y(u;\, x_1, y_1) \\ p=y'_x(u;\, x_1, y_1)}} du},$$

gdzie całkę w wykładniku rozumiemy, jako wartość główną (w sensie Cauchy'ego), t. zn.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{x_1}^{\xi-\varepsilon} \frac{f'_y}{f'_p}\, du + \int_{\xi+\varepsilon}^{x} \frac{f'_y}{f'_p}\, du \right\}.$$

Wyprowadzenie wzoru na pochodnę cząstkową względem parametru x_1 sprowadza się, jak wiadomo, bezpośrednio do poprzedniego zadania; mamy mianowicie:

$$\frac{\partial y(x; x_1, y_1)}{\partial x_1} = p_1 e^{-\int_{x_1}^{x} \frac{f'_y}{f'_p} \Big|_{\substack{x=u \\ y=y(u;x_1,y_1) \\ p=y'_x(u;\, x_1,y_1)}} du}, \tag{34}$$

gdzie całkę w wykładniku należy rozumieć, jak poprzednio.

Nakoniec zauważymy jeszcze, iż w założeniach $C^{(n)}$ wzór (31) pokazuje, że funkcja $y(x, \xi)$ jest klasy $C^{(n-2)}$ względem zmiennej ξ, zaś ze wzoru (30) wynika to samo o funkcji $y(x; x_1, y_1)$ względem parametrów x_1 i y_1. Wówczas bowiem równanie (26) jest klasy $C^{(n-2)}$, wobec czego, na zasadzie twierdzeń klasycznych, funkcje $p(x; x_1, p_1)$ i $p(x, \xi)$ są również klasy $C^{(n-2)}$, zaś funkcja $U(x, p)$ jest klasy $C^{(n)}$.

Streszczając wyniki powyższych rozważań, możemy sformułować twierdzenie następujące:

T w i e r d z e n i e 9. *W warunkach* (S_3), *całka nieosobliwa równania* (1), *uważana za funkcję współrzędnych punktu początkowego* (x_1, y_1), *jest ciągłą względem tychże, również wtedy, gdy punkt ten leży na całce osobliwej. W tym ostatnim przypadku, pochodna* $\frac{\partial y}{\partial y_1}$ *jest jednak nieskończona, a jeśli w rozważanym punkcie całki osobliwej jest* $f'_x \neq 0$, *to i pochodna* $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ *jest nieskończona. Natomiast całka nieosobliwa, uważana za funkcję odciętej punktu styczności z całką osobliwą, jest w stosunku do tej odciętej klasy* $C^{(1)}$, *a ogólnie klasy* $C^{(n-2)}$, *jeśli równanie* (1) *jest klasy* $C^{(n)}$. *Wreszcie, jeżeli punkt początkowy nie leży na całce osobliwej, lecz jest oddzielony od punktu bieżącego punktem styczności z całką osobliwą, funkcja całkowa jest klasy* $C^{(1)}$, *w warunkach zaś* (S_n), *klasy* $C^{(n-2)}$, *względem współrzędnych punktu początkowego.*

Na zakończenie niniejszego paragrafu, zauważymy jeszcze, iż do wniosku o równoważności równań (1) i (26), zawartego w twierdzeniu 4, można było dojść jeszcze na innej drodze.

Mianowicie można z równania (1) otrzymać równanie

$$u' = H(x, u),$$

nie różniące się od równania (26), przez przekształcenie punktowe:

$$y = U(x, u);$$

droga ta wydała się nam wszakże mniej dogodną. Widać teraz jednak, iż metoda nasza jest ściśle spokrewniona z metodą, stosowaną w przypadku równania analitycznego [1]), a polegającą na zmianie zmiennych

$$y = \varphi(x) + z^2;$$

nota bene, obie te zmiany zmiennych posiadają tę samą osobliwość, polegającą na tem, iż na całce osobliwej pochodna zmiennej y względem nowej zmiennej równa się zeru.

Zmiana zmiennych, którą ostatnio wymieniliśmy, może, po drobnem uzupełnieniu, znaleść zastosowanie i w rozważanych przez nas warunkach. Mianowicie, kładąc

$$y = \varphi(x) + \theta z^2,$$

gdzie

$$\theta = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}} \cdot \left|\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right|,$$

otrzymujemy, podobnie, jak przypadku równania analitycznego, równanie

$$z' = V(x, z),$$

klasy $C^{(n-2)}$, o ile równanie (1) jest klasy $C^{(n)}$. Metoda badania równania (1), oparta na takiej zmianie zmiennych, jest jednak zawilsza od tej, którą wyłożyliśmy, a do tego wymaga w pewnych punktach rozróżnienia pomiędzy zmiennemi rzeczywistemi, a zespolonemi.

---

[1]) Patrz np. *Picard, loc. cit.*

§ 4. Bezpośrednie badanie równania $f(x, y, p) = 0$.

Rozważania nasze mają za cel ograniczenie do niezbędnego minimum założeń, pod któremi zachodzą twierdzenia, udowodnione w § 3. Z konieczności natomiast, dowodzenia będą się teraz odnosiły wyłącznie do wielkości rzeczywistych. Rozpoczynając badanie nanowo, nie będziemy, oczywiście, korzystali z twierdzeń, udowodnionych w poprzednim paragrafie. Oprzemy się jedynie na lemacie drugim, będącym bezpośredniem zastosowaniem twierdzenia 2 (§ 2).

Według twierdzenia 1., równanie (1) równoważne jest, w założeniach (S_2), alternatywie równań

$$p = \Phi_1(x, y) \quad \text{i} \quad p = \Phi_2(x, y);$$

metoda, zastosowana w niniejszym paragrafie, będzie właśnie polegała na bezpośredniem badaniu tych równań.

Przedewszystkiem, podamy dowód lematu 1., oparty na twierdzeniu 1.

Gdyby jakaś całka równania (1) była styczna w jakichś dwóch punktach, x_1 i x_2, przedziału $(x_0 - a, x_0 + a)$ [1], do całki osobliwej $y = \varphi'(x)$, nie będąc jej identycznie równą w przedziale (x_1, x_2), istniałby wewnątrz tego przedziału punkt x, dla którego byłoby na rozważanej całce

$$y \neq \varphi(x) \quad \text{i} \quad y' - \varphi'(x) = 0,$$

a więc

$$p = \chi(x).$$

Z drugiej strony jednak byłoby

$$p = \Phi_1(x, y) \quad \text{lub} \quad p = \Phi_2(x, y),$$

skąd, według związków (11) i (23),

$$p < \chi(x) \quad \text{lub} \quad p > \chi(x),$$

co jest sprzeczne z poprzednim rezultatem. W ten sposób lemat 1. (a zatem i twierdzenie 3), jest udowodniony.

Zwracając się teraz do zagadnienia egzystencji całki nieosobliwej, zmierzamy do nowego dowodu twierdzenia 5. Podstawą, na

[1]) Zachowujemy w ogólności wszystkie oznaczenia § 2.

której oprzemy ten dowód, jest twierdzenie, udowodnione przez O. Perrona [1]), które brzmi dosłownie jak następuje:

„Funkcja $f(x, y)$ niech będzie ciągłą w pewnym obszarze T, określonym nierównościami

$$x_0 \leqq x \leqq X,$$
$$\omega_1(x) \leqq y \leqq \omega_2(x).$$

Przytem funkcje $\omega_1(x)$ i $\omega_2(x)$ mają czynić zadość następującym warunkom:

1°. Są w przedziale (x_0, X) ciągłe i przybierają dla $x = x_0$ wartość y_0.

2°. Prawo — i lewostronne pochodne $D_+\omega_i(x)$, $D_-\omega_i(x)$ istnieją i czynią zadość nierównościom

$$D_\pm \omega_1(x) \leqq f(x, \omega_1(x)),$$
$$D_\pm \omega_2(x) \geqq f(x, \omega_2(x)),$$

Przy tych założeniach... w przedziale (x_0, X) istnieje przynajmniej jedna funkcja $y = y(x)$, pozostająca w całości w obszarze T, tak, iż w szczególności jest $y(x_0) = y_0$, i spełniająca równanie różniczkowe

$$y' = f(x, y)“.$$

Połóżmy teraz

$$\Omega(p') = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} p'^2 + \left\{2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p} + 2p\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial p} + \frac{\partial f}{\partial y}\right\} p' + $$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + p^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

gdzie pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y, p)$ są wzięte w elemencie (x_0, y_0, p_0). Jeżeli wówczas przypuścimy, iż mamy do czynienia z całką klasy $C^{(2)}$ równania (1), przechodzącą przez ten element, wówczas, różniczkując dwukrotnie równanie (1), przy uwzględnieniu związku (3), uzyskamy na drugą pochodnę p' w elemencie (x_0, y_0, p_0) równanie

$$\Omega(p') = 0.$$

Całka osobliwa jest, w założeniach (S_2), punktowo klasy $C^{(2)}$, ponieważ funkcja $\chi(x)$ jest wówczas klasy $C^{(1)}$, wobec czego, w myśl

---

[1]) Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, Mathematische Annalen, t. 76 (1925), str. 471, *ss*.

uwagi, uczynionej na początku poprzedniego paragrafu, istnieje druga pochodna $\varphi''(x)$, spełniająca identycznie związek

$$\varphi''(x) = \chi'(x).$$

Całka osobliwa spełnia zatem równanie $\Omega(p') = 0$. Można zresztą sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, iż prawa strona związku (27) spełnia istotnie to równanie; korzystamy w tym celu ze zróżniczkowanej identyczności (4).

Łatwo się teraz domyślić, iż drugi z pierwiastków równania $\Omega(p') = 0$ będzie przedstawiał drugą pochodnę całki nieosobliwej. Rzeczywiście, rozwiązując powyższe równanie, otrzymujemy wzór (29). Wzór ten może zresztą być uzasadniony niezależnie od rozważań, dotyczących równania (26). Zauważyliśmy bowiem, że przez różniczkowanie równania (1), otrzymujemy związek

$$p' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}},$$

któremu musi czynić zadość każda całka w elementach nieosobliwych. Lemat zaś 2 oznacza, iż gdy element linjowy, czyniący zadość równaniu (1), zdąża do całki osobliwej, prawa strona powyższego związku zdąża do prawej strony związku (29). W szczególności ma to miejsce, gdy element zdąża do całki osobliwej po całce nieosobliwej. Wobec tego, na mocy znanego twierdzenia z elementów rachunku różniczkowego, związek (29) zachodzi w punkcie styczności z całką osobliwą. Mamy więc tutaj nowy dowód twierdzenia 6.

Wyrażenie

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}},$$

stanowiące różnicę pierwiastków równania $\Omega(p') = 0$, z uwagi na nierówność (6), nie może być zerem. Jest zatem dodatnie albo ujemne. Ponieważ jeden przypadek sprowadza się do drugiego przez prostą zamianę, w równaniu (1), zmiennej zależnej y na $-y$, możemy, bez szkody dla ogólności, przyjąć, iż jest

$$(35) \qquad -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}} > 0.$$

Nie będziemy natomiast korzystali z uczynionego w dowodzie twierdzenia 1. założenia (12).

Zajmiemy się również — podobnie, jak to czyni O. Perron[1]) — jedynie prawą stroną obchodzącej nas całki, t. j. tą jej częścią, która odpowiada wartościom zmiennej niezależnej, większym od liczby x_0. To samo bowiem rozumowanie, przez zamianę zmiennej x na $-x$, pozwoli nam odnaleść część całki, określoną dla wartości zmiennej niezależnej, mniejszych od liczby x_0.

Właściwy dowód twierdzenia 5 wygląda teraz, jak następuje: Oznaczmy przez η_1 i η_2 dwie liczby, spełniające nierówności:

$$0 < \eta_1 < -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}}\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ p=p_0}} < \eta_2,$$

pozatem zresztą dowolne. Połóżmy dalej

$$\left|\begin{array}{l} \omega_1(x) = \varphi(x) + \frac{\eta_1}{2}(x-x_0)^2, \\ \omega_2(u) = \varphi(x) + \frac{\eta_2}{2}(x-x_0)^2. \end{array}\right.$$

Istnieje wówczas taka liczba X_0, większa od x_0, że gdy tylko liczba X spełnia nierówności

$$x_0 < X \leqq X_0,$$

obszar T, określony związkami

$$\begin{cases} x_0 \leqq x \leqq X, \\ \omega_1(x) \leqq y \leqq \omega_2(x), \end{cases}$$

leży w całości w obszarze (Δ'). Istotnie bowiem, w założeniu (35), obszar (Δ') określony jest nierównościami

$$x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a, \quad \varphi(x) \leqq y \leqq y_0 + b.$$

---

[1]) *loc. cit.*

Z drugiej strony, z określenia funkcyj $\omega_1(x)$ i $\omega_2(x)$ mamy

$$\left| \begin{array}{l} \varphi(x_0) = \omega_1(x_0) = \omega_2(x_0) \\ \varphi'(x_0) = \omega_1'(x_0) = \omega_2'(x_0) \\ \varphi''(x_0) < \omega_1''(x_0) < \omega_2''(x_0) \end{array} \right.$$

Funkcja $\Phi_2(x, y)$ jest więc w obszarze T — z uwagi na punkt 6^0 twierdzenia 1. — ciągłą. Funkcje zaś $\omega_1(x)$ i $\omega_2(x)$ są w przedziale (x_0, X) ciągłe i różniczkowalne.

Weźmy teraz pod uwagę wartości, jakie przybiera funkcja $f(x, y, p)$ na krzywych $y = \omega_1(x)$ i $y = \omega_2(x)$. Chodzi zatem o funkcje złożone

$$f\{x, \omega_1(x), \omega_1'(x)\} \quad \text{i} \quad f\{x, \omega_2(x), \omega_2'(x)\}.$$

Funkcje te dla wartości x_0 zmiennej niezależnej x zerują się wraz z pierwszą pochodną, a to z uwagi na związki (1), (3) i (4), zachodzące w elemencie (x_0, y_0, p_0). Zauważyliśmy właśnie w cytowanej pracy, iż własnością charakterystyczną elementu osobliwego równania (1) jest to, iż, wychodząc z niego po dowolnej krzywej (pojętej, jako pasmo stycznościowe), mamy zawsze $df = 0$. Natomiast jest

$$\frac{d^2}{dx^2} f\{x, \omega_i(x), \omega_i'(x)\} = \Omega\{\omega_i''(x_0)\} \quad (i = 1, 2).$$

Jednakowoż, ze sposobu, w jaki wybraliśmy liczby η_1 i η_2, wynika, iż liczba

$$\omega_1''(x_0) = \varphi''(x_0) + \eta_1$$

jest zawarta pomiędzy pierwiastkami równania $\Omega(p') = 0$, zaś liczba

$$\omega_2''(x_0) = \varphi''(x_0) + \eta_2$$

jest od nich większa. Zatem wyrażenie $\Omega\{\omega_2''(x_0)\}$ ma ten sam znak, co pochodna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2},$$

zaś wyrażenie $\Omega\{\omega_1''(x_0)\}$ ma znak przeciwny. Jeżeli zatem wybierzemy liczbę X, niewiększą od poprzednio wymienionej liczby X_0, dostatecznie bliską liczby x_0, funkcje złożone

$$f\{x, \omega_1(x), \omega_1'(x)\} \quad \text{i} \quad f\{x, \omega_2(x), \omega_2'(x)\}$$

będą miały w przedziale (x_0, X) odpowiednio te same znaki, co wyrażenia

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \text{ i } \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}.$$

Wówczas, według punktu ósmego twierdzenia 1., jest

$$\Phi_2\{x, \omega_1(x)\} < \omega_1'(x) < \Phi_2\{x, \omega_1(x)\}$$

oraz

$$\omega_2'(x) < \Phi_1\{x, \omega_2(x)\} \quad \text{lub} \quad \omega_2'(x) > \Phi_2\{x, \omega_2(x)\}.$$

Jednakże w ostatnim związku wykluczona jest pierwsza alternatywa; ze względu bowiem na nierówność (11) i identyczność (23) oraz $\chi(x) = \varphi'(x)$, jest

$$\Phi_1(x, y) < \varphi'(x) < \Phi_2(x, y) \tag{36}$$

gdy tylko $y \neq \varphi(x)$, a zatem mielibyśmy nierówność

$$\omega_2'(x) < \varphi'(x),$$

wykluczoną ze względu na sposób, w jaki utworzyliśmy funkcję $\omega_2(x)$. Ostatecznie więc mamy, dla wartości zmiennej x, spełniających nierówności

$$x_0 < x \leqq X,$$

związki

$$\begin{cases} \omega_1'(x) < \Phi_2\{x, \omega_1(x)\}, \\ \omega_2'(x) > \Phi_2\{x, \omega_2(x)\}. \end{cases}$$

Łatwy rachunek (lub też uwaga o ciągłości obu stron powyższych nierówności) wskazuje, iż jest nadto

$$\begin{cases} \omega_1'(x_0) = \Phi_2\{x_0, \omega_1(x_0)\}, \\ \omega_2'(x_0) = \Phi_2\{x_0, \omega_2(x_0)\}, \end{cases}$$

zaczem w całym przedziale domkniętym (x_0, X) jest

$$\begin{cases} \omega_1'(x) \leqq \Phi_2\{x, \omega_1(x)\}, \\ \omega_2'(x) \geqq \Phi_2\{x, \omega_2(x)\}. \end{cases}$$

Teraz spełnione są warunki twierdzenia O. Perrona; stąd, wobec poczynionych na wstępie uwag, wynika twierdzenie 5.

Uwaga 1. Całka równania (1), którą znaleźliśmy, jest całką równania $y' = \Phi_2(x, y)$; łatwo dostrzec, iż analogiczna całka dla wartości zmiennej niezależnej, mniejszych od liczby x_0, jest — w za-

łożeniu (35) — całką równania $y' = \Phi_1(x, y)$, albowiem, zamieniając x na $-x$, musimy równocześnie zamienić p na $-p$, przez co zamieniają się role funkcyj $\Phi_1(x, y)$ i $\Phi_2(x, y)$. W przypadku natomiast, gdy nierówność (35) nie jest spełniona, rzecz ma się odwrotnie.

Nie jest trudno zdać sobie sprawę z tego, iż pomiędzy całkami nieosobliwemi równania (1) nie istnieje — w razie spełnienia nierówności (35) — żadna całka równania $y' = \Phi_1(x, y)$, określona dla wartości zmiennej x, większych od liczby x_0 i przybierająca dla $x = x_0$ wartość y_0, ani też żadna całka równania $y' = \Phi_2(x, y)$, określona dla wartości zmiennej x, mniejszych od liczby x_0, a przybierająca dla $x = x_0$ wartość y_0, albowiem w myśl nierówności (36), na każdej z tych całek, poza punktem $x = x_0$, musiałoby być stale

$$y(x) < \varphi(x),$$

co jest wykluczone na zasadzie punktu drugiego twierdzenia 1. Natomiast całka osobliwa czyni zadość obu powyższym równaniom.

Uogólnieniem podanego w § 3. twierdzenia 7′ jest następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e 7. *W założeniach* (S_2), *przez element* $(x_0, y_0; p_0)$ *przechodzi* *n a j w y ż e j* *jedna całka nieosobliwa równania* (1).

D o w ó d. Podobnie, jak w dowodzie twierdzenia 5., będziemy się zajmowali jedynie większemi od liczby x_0 wartościami zmiennej niezależnej. Zakładamy przytem w dalszem ciągu, iż spełniona jest nierówność (35). W myśl zatem uczynionej przed chwilą uwagi, mamy do czynienia jedynie z całkami równania $y' = \Phi_2(x, y)$.

Założmy teraz istnienie w jakimś przedziale (x_0, X) (liczba X ma tu zatem inne znaczenie, niż w dowodzie twierdzenia 5) dwóch różnych całek, $y_1(x)$ i $y_2(x)$, tego równania, różnych zarazem od całki osobliwej $y = \varphi(x)$ i spełniających związki

$$y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0,$$

skąd też

$$y_1'(x_0) = y_2'(x_0) = p_0;$$

na całkach tych jest zatem spełniony również związek (29). Z drugiej strony, w myśl uwagi, uczynionej przy punkcie szóstym twierdzenia 1., funkcja $\Phi_2(x, y)$ jest, poza krzywą $y = \varphi(x)$, klasy $C^{(2)}$. Stąd wynika, iż, poza punktem (x_0, y_0), do rozważanych całek równania $y' = \Phi_2(x, y)$ stosują się znane twierdzenia o jednotliwości całki. Gdyby zatem w jakimkolwiek punkcie przedziału (x_0, X),

różnym od x_0, było $y_2(x) = y_1(x)$, równość ta zachodziłaby w całym przedziale, co właśnie wykluczyliśmy. Wobec tego, z uwagi na ciągłość całek, dobierając stosownie oznaczenia, możemy zawsze uczynić

$$y_1(x) < y_2(x) \quad \text{dla} \quad x_0 < x \leqq X.$$

Niech teraz b będzie dowolną liczbą, spełniającą nierówności

$$y_1(X) < b < y_2(X).$$

Przez punkt (X, b) przechodzi całka równania $y' = \Phi_2(x, y)$, którą oznaczymy przez $y(x, b)$. Łatwo zrozumieć, iż całkę tę można przedłużyć w kierunku odciętych malejących, aż do punktu $x = x_0$, przyczem zachodzą nierówności:

$$y_1(x) < y(x, b) < y_2(x) \quad \text{jeżeli} \quad x_0 < x \leqq X,$$

a nadto związek

$$y_1(x_0) = y(x_0, b) = y_2(x_0).$$

Znany wzór Bendixsona, z którego już przedtem korzystaliśmy, daje

$$\frac{\partial y(x, b)}{\partial b} = e^{\int\limits_X^x \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\Big|_{\substack{x=u \\ y=y(u,b)}} du}$$

dla wartości zmiennych x i b, spełniających nierówności

$$x_0 < x \leqq X \quad \text{i} \quad y_1(X) < b < y_2(X).$$

Z twierdzenia o skończonych przyrostach mamy przeto

$$(37) \qquad y_2(x) - y_1(x) = \{y_2(X) - y_1(X)\}\, e^{\int\limits_X^x \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\Big|_{\substack{x=u \\ y=y\{u,b(x)\}}} du}$$

gdzie $b(x)$ jest funkcją, przybierającą wartości, zawarte pomiędzy liczbami $y_1(X)$ i $y_2(X)$.

Najbliższem naszem zadaniem jest teraz oszacowanie, nieskończenie małej dla $x \to x_0$, prawej strony powyższego związku, przez znalezienie stosownej minoranty. Zauważymy przedewszystkiem, iż pochodna

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$$

jest w pewnem otoczenie punktu (x_0, y_0) funkcją malejącą zmiennej y.

W rzeczy samej, łatwo się przekonać, że jeśli $y \neq \varphi(x)$, jest

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} < 0.$$

Jest bowiem, według reguł różniczkowania funkcji uwikłanych,

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial p}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial p} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^3}.$$

W wyrażeniu tem, gdy $y \to \varphi(x)$, licznik, z uwagi na związek (3), zdąża do granicy

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2},$$

ma więc ten sam znak, co wyrażenie

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}.$$

Mianownik zaś, według punktu siódmego twierdzenia 1., ma ten sam znak, co pochodna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}.$$

Jest więc istotnie

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} < 0,$$

co potwierdza naszą uwagę.

Ponieważ liczba X mogła być wybrana dowolnie bliską liczby x_0, możemy przyjąć, iż wybór jej został tak uskuteczniony, aby pochodna

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$$

była funkcją malejącą zmiennej y w całym obszarze, określonym związkami

$$\begin{cases} x_0 < x \leqq X, \\ y_1(x) \leqq y \leqq y_2(x). \end{cases}$$

Mamy przeto, z uwagi na nierówności, którym czyni zadość całka $y(x)$,

$$(38) \qquad \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right|_{\substack{x=u \\ y=y\{u, b(x)\}}} < \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right|_{\substack{x=u \\ y=y_1(u)}} \quad \text{dla } x_0 < u \leqq X.$$

Prawa strona powyższej nierówności wyraża się wzorem

$$- \left.\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}}\right|_{\substack{x=u \\ y=y_1(u) \\ p=y_1'(u)}},$$

w którym mianownik się zeruje dla $u = x_0$. Jednakowoż, ponieważ całka $y_1(x)$ czyni w punkcie $u = x_0$ zadość związkowi (29), pochodna mianownika w tym punkcie równa się wyrażeniu

$$- \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ p=p_0}},$$

Jest więc

$$\left.\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}}\right|_{\substack{x=u \\ y=y_1(u) \\ p=y_1'(u)}} = \frac{N(u)}{u - x_0}$$

gdzie

$$\lim_{\to x_0} N(u) = -1,$$

Możemy znowuż przyjąć, iż liczba X została tak wybrana, aby wewnątrz przedziału (x_0, X) było

$$|N(u)| < 2.$$

Wówczas, w przedziale tym jest

$$\left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right|_{\substack{x=u \\ y=y\{u, b(x)\}}} < \frac{2}{u - x_0}.$$

Mamy przeto, według związków (37) i (38),

$$y_2(x) - y_1(x) > \frac{y_2(X) - y_1(X)}{(X - x_0)^2} (x - x_0)^2,$$

skoro tylko liczba x spełnia nierówności $x_0 < x \leqq X$.

Z drugiej strony, rozwinięcie na szereg Taylora z resztą według wzoru Peana różnicy $y_2(x) - y_1(x)$, jeśli uwzględnić, iż obie te całki spełniają związek (29) w punkcie $x = x_0$, daje

$$y_1(x) - y_1(x) = (x - x_0)^2\, \varepsilon(x),$$

gdzie

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Wzór ten jest wszakże sprzeczny z dopiero co otrzymaną nierównością. Twierdzenie 7 jest więc udowodnione.

§ 5. Całka nieosobliwa, jako funkcja warunków początkowych; stała całkowania.

Już w § 3 rozpatrywaliśmy funkcję $y(x, \xi)$, stanowiącą, przy danej wartości na ξ, jedyną całkę nieosobliwą równania (1), przechodzącą przez element $\{\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)\}$. Przystępując do szczegołowego badania tej funkcji, zamierzamy przedewszystkiem ustalić obszar, w którym napewno można ją uważać za określoną. Udowodnimy mianowicie twierdzenie następujące:

Twierdzenie 10. — *W założeniach* (S_2), *istnieje taka liczba dodatnia* α, *iż funkcja* $y(x, \xi)$ *jest określona przynajmniej dla wszystkich wartości obu zmiennych, zawartych w przedziale* $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$.

Dowód. W założeniach (S_2), funkcja $\varphi(x)$ określona jest w przedziale $(x_0 - a, x_0 + a)$. Z założeń tych wynika, iż funkcja ta jest całką osobliwą równania (1) w pewnem otoczeniu punktu $x = x_0$, lecz założenia te, ściśle biorąc, nie przesądzają tego, czy w całym wspomnianym przedziale krzywa $y = \varphi(x)$ czyni zadość równaniu (1). Ponieważ jednak liczba a może być, oczywiście (patrz dowód twierdzenia 1.), uważana za dowolnie małą, możemy przyjąć, iż krzywa $y = \varphi(x)$ jest w całym przedziale całką równania (1); wówczas też jest ona w całym tym przedziale całką osobliwą.

Funkcję $y(x, \xi)$ możnaby więc uważać za określoną dla wszystkich wartości zmiennej ξ, zawartych w przedziale $(x_0 - a, x_0 + a)$. Nie jest jednak powiedziane, iż rozważana funkcja będzie określona dla tych samych wartości zmiennej x. Wewnątrz obszaru (Δ') można wprawdzie — wobec stosowalności twierdzeń o egzystencji w przypadku regularnym — zawsze przedłużać — i to w sposób jednoznaczny — całkę równania (1), jednakowoż możemy natrafić na brzeg tego obszaru zanim zmienna x osiągnie kraniec przedziału

$(x_0 - a, x_0 + a)$. Może się to mianowicie stać, wobec lematu 1., jedynie przez osiągnięcie prostej $y = y_0 \pm b$.

Oznaczmy przez K maximum wyrażeń

$$|\Phi_i(x, y) - \varphi'(x)| \quad (i = 1, 2)$$

w obszarze (Δ'). Mamy wówczas

$$(39) \qquad |y(x, \xi) - \varphi(x)| \leqq K |x - \xi|.$$

Oznaczmy prócz tego przez m minimum wyrażenia

$$|y_0 \pm b - \varphi(x)|.$$

Z uwagi na związek (17) i na ciągłość funkcji $\varphi(x)$ jest

$$m > 0.$$

Połóżmy teraz

$$\alpha = \min\left(a, \frac{m}{2K}\right);$$

wówczas jest widocznem, iż funkcję $y(x, \xi)$ można będzie uważać za określoną w przedziale $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, albowiem dla każdej wartości zmiennej ξ, zawartej w tym przedziale, istnieje całka nieosobliwa, styczna w odnośnym punkcie do całki osobliwej a, w myśl nierówności (39), nie będzie ona mogła osiągnąć brzegu obszaru (Δ'), zanim zmienna x nie dojdzie do końca tego samego przedziału. Twierdzenie 10 jest więc udowodnione.

Do całki $y(x, \xi)$, którą odtąd rozważamy tylko dla wartości obu zmiennych, zawartych w przedziale $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, stosuje się twierdzenie następujące:

Twierdzenie 11. — *W założeniach* (S_2), *funkcja* $y(x, \xi)$ *jest funkcją malejącą zmiennej* ξ *dla* $\xi < x$, *a rosnącą dla* $\xi > x$, *o ile zachodzi związek* (35), *zaś w przeciwnym przypadku rzecz ma się odwrotnie.*

Dowód. Z tych samych względów, co w paru poprzednich dowodach, możemy ograniczyć się do rozważenia pierwszego przypadku, i to tylko dla wartości zmiennych x i ξ, spełniających nierówności

$$\xi < x.$$

Trzeba zatem, zakładając nierówności

$$x_0 - \alpha \leqq \xi_1 < \xi_2 < x \leqq x_0 + \alpha,$$

pokazać, iż mamy

$$y(x, \xi_1) > y(x, \xi_2).$$

W rzeczy samej, z lematu 1. {§ 3} przez kontrapozycję wynika

$$y(\xi_2, \xi_1) \neq \varphi(\xi_2),$$

a mianowicie, wobec nierówności (35) i punktu drugiego twierdzenia 1.

$$y(\xi_2, \xi_1) > \varphi(\xi_2).$$

Z definicji funkcji $y(x, \xi)$ wynika jednak identyczność

(40) $$\varphi(\xi_2) = y(\xi_2, \xi_2),$$

zaczem jest

$$y(\xi_2, \xi_1) > y(\xi_2, \xi_2).$$

Gdyby teraz było

$$y(x, \xi_1) \leqslant y(x, \xi_2),$$

na mocy ciągłości funkcyj całkowych, znalazłaby się liczba x', spełniająca nierówności

$$\xi_2 < x' \leqq x,$$

dla której byłoby

$$y(x', \xi_1) = y(x', \xi_2);$$

wówczas jednak, wobec jednotliwości całek równania $y' = \Phi_2(x, y)$ (patrz uwaga 1.) wewnątrz obszaru $(\varDelta')$, związek ten zachodziłby dla wszystkich wartości na x', spełniających ostatnio wymienione nierówności, co zkolei, przez ciągłość, spowodowałoby, właśnie poprzednio wykluczoną, równość

$$y(\xi_2, \xi_1) = y(\xi_2, \xi_2).$$

Mamy zatem

$$y(x, \xi_1) > y(x, \xi_2), \text{ c. b. d. o.}$$

Z twierdzenia tego skorzystamy dla udowodnienia twierdzenia następującego:

T w i e r d z e n i e 12. *W założeniach* (S_2), *funkcja* $y(x, \xi)$ *jest ciągła względem zmiennej* ξ.

D o w ó d. Niech będzie ξ_0 liczbą zawartą w przedziale $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. Dla $x = \xi_0$, ciągłość jest niemal oczywista. Według bowiem związków (39) i (40) z odpowiedniemi podstawieniami, otrzymujemy

$$|y(\xi_0, \xi) - y(\xi_0, \xi_0)| \leqq K|\xi - \xi_0|.$$

Przechodząc do przypadku ogólnego, w którym jest

$$x \neq \xi_0,$$

możemy znowuż przyjąć, bez uszczerbku dla ogólności naszych rozważań, iż jest

$$x = x_1 > \xi_0,$$

oraz, że spełniony jest związek (35). W myśl twierdzenia 11, funkcja $y(x_1, \xi)$ jest funkcją malejącą w stosunku do zmiennej ξ. Stąd wynika istnienie granic skończonych: prawo- i lewostronnej funkcji $y(x_1, \xi)$ dla $\xi = \xi_0$.

Przypuśćmy teraz, iż jedna z tych granic, np. granica prawostronna, różni się od liczby $y(x_1, \xi_0)$. Oczywiście, musi ona być od niej mniejsza. Istnieje zatem liczba η, zawarta pomiędzy temi wielkościami i różna od nich. Przez punkt (x_1, η) przechodzi wówczas jedna i tylko jedna całka równania $y' = \Phi_2(x, y)$ (któremu również, w myśl uwagi 1., czynią zadość całki $y(x, \xi)$ i $y(x, \xi_0)$), którą oznaczymy przez $y(x)$. Ponieważ

$$y(x_1, \xi) < \eta < y(x_1, \xi_0) \quad \text{gdy tylko} \quad \xi > \xi_0,$$

przeto, przy każdej wartości zmiennej ξ, zawartej wewnątrz przedziału (ξ_0, x_1), zachodzą dla każdej wartości zmiennej x, zawartej wewnątrz przedziału (ξ, x_1), nierówności

$$y(x, \xi) < y(x) < y(x, \xi_0).$$

Ponieważ zaś, jak widzieliśmy, jest, przy naszych założeniach,

$$\varphi(x) < y(x, \xi) \quad \text{dla} \quad x > \xi,$$

a liczba ξ może być dowolnie mało różną od ξ_0, mamy, gdy tylko spełnione są nierówności

$$\xi_0 < x < x_1$$

związek

$$\varphi(x) < y(x) < y(x, \xi_0),$$

skąd, z uwagi na identyczność (40), wynikałby, przez ciągłość, związek

$$y(\xi_0) = y(\xi_0, \xi_0),$$

a w następstwie tego związku istniałyby, wbrew tw. 7, dwie całki nieosobliwe, mianowicie $y(x)$ i $y(x, \xi_0)$, styczne w punkcie ξ_0 do całki osobliwej.

Gdyby granica lewostronna funkcji $y(x, \xi)$ dla $\xi = \xi_0$ była

różną od wyrażenia $y(x, \xi_0)$, rozumowalibyśmy dość podobnie. Mianowicie, wprowadzając znowuż liczbę η, zawartą między wspomianemi wielkościami, i oznaczając znowu przez $y(x)$ całkę równania $y' = \Phi_2(x, y)$, przechodzącą przez punkt (x_1, η), mielibyśmy nierówności

$$y(x, \xi_0) < y(x) < y(x, \xi)$$

dla wartości zmiennej x, zawartych wewnątrz przedziału (ξ_0, x_1). Przez przejście do granicy, uzyskalibyśmy wtedy

$$y(\xi_0, \xi_0) \leqq y(\xi_0) \leqq y(\xi_0, \xi).$$

Przechodząc zaś do granicy względem zmiennej ξ, przy uwzględnieniu, udowodnionej już, ciągłości funkcji $y(\xi_0, \xi)$ dla $\xi = \xi_0$, otrzymalibyśmy znowuż związek

$$y_0(\xi_0) = y(\xi_0, \xi_0).$$

sprzeczny z założeniami na mocy twierdzenia 7.

Wobec tego, granice jednostronne funkcji $y(x, \xi)$ dla $\xi = \xi_0$ są równe wyrażeniu $y(x, \xi_0)$, innemi słowy, funkcja $y(x, \xi)$ jest ciągła względem zmiennej ξ, c. b. d. o.

U w a g a 2. W myśl powyższego twierdzenia, funkcja $y(x, \xi)$ jest ciągła punktowo, ponieważ jest ona widocznie jednostajnie ciągła względem zmiennej x.

Ostatnie trzy twierdzenia pozwalają już łatwo udowodnić następujące, podstawowe twierdzenie:

T w i e r d z e n i e 13. — *W założeniach* (S_2) *istnieje na płaszczyźnie* (x, y) *obszar* (C), *zawierający całą część otoczenia punktu* (x_0, y_0), *położoną w obszarze* (Δ'), *taki, iż każdą z obu całek równania* (1), *odpowiadających obu gałęziom jego rozwiązania, schodzącym się na całce osobliwej* $y = \varphi(x)$ *i przechodzących przez dowolny punkt tego obszaru, można otrzymać, nadając stosowne wartości parametrowi* ξ *funkcji* $y(x, \xi)$. *Wskutek tego, parametr* ξ — *lub jakakolwiek jego funkcja ciągła i monotoniczna — może uchodzić za stałę całkowania równania* (1) *w obszarze* (C).

D o w ó d. — Przyjmujemy w dalszym ciągu, iż spełniona jest nierówność (35) i że litera a ma to samo znaczenie, co w dowodzie twierdzenia 10. Oznaczamy przez (C) zbiór punktów, czyniących zadość nierównościom

$$\left|\begin{array}{l} x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a, \\ \varphi(x) \leqq y, \\ y \leqq y(x, x_0 - a), \\ y \leqq y(x, x_0 + a). \end{array}\right.$$

Ponieważ jest, w myśl uwagi, uczynionej w dowodzie twierdzenia 11,

$$\varphi(x) < y(x, x_0 - a), \quad y(x, x_0 + a)$$

w całym wnętrzu przedziału $(x_0 - a, x_0 + a)$, widocznem jest, iż określony w ten sposób obszar (C) obejmuje tę część otoczenia punktu (x_0, y_0), która zawarta jest w obszarze (Δ'). Pokażemy, iż wogóle obszar (C) czyni zadość warunkon naszego twierdzenia. W rzeczy samej, odnośnie do punktów, położonych na całce osobliwej, rzecz jest trywjalna. Niech teraz będzie punkt (x, y), należący do obszaru (C), lecz nie leżący na krzywej $y = \varphi(x)$. Mamy wówczas nierówności następujące:

$$x_0 - a < x < x_0 + a,$$

$$\varphi(x) < y$$

(a) $$y \leqq y(x, x_0 - a),$$

(b) $$y \leqq y(x, x_0 + a).$$

Uwzględniając identyczność (40), drugą z powyższych nierówności możemy napisać także w postaci następującej:

(c) $$y > y(x, x).$$

Wobec tego, iż funkcja $y(x, \xi)$ jest, jako funkcja zmiennej ξ w przedziale $(x_0 - a, x)$, według twierdzeń 11 i 12, ciągła i monotoniczna, a nadto, na krańcach przedziału spełnia nierówności (a) i (c), istnieje jedna i tylko jedna wartość zmiennej ξ, zawarta w przedziale $(x_0 - a, x)$, dla której jest

$$y(x, \xi) = y.$$

W podobny sposób, powołując się na nierówności (b) i (c), stwierdzimy istnienie jednej i tylko jednej wartości zmiennej ξ, zawartej w przedziale $(x, x_0 + a)$ i spełniającej to samo równanie. W ten sposób twierdzenie jest udowodnione. W myśl uwagi 1., (str. 88), zauważamy przytem, iż — w założeniu (35) — pierwsza ze znalezionych wartości zmiennej ξ daje całkę równania $y' = \Phi_1(x, y)$, druga zaś całkę równania $y' = \Phi_2(x, y)$; równania te odpowiadają właśnie obu rozważanym gałęziom rozwiązania równania (1).

Na zakończenie, podamy twierdzenie, dotyczące pochodnej cząstkowej funcji całkowej w stosunku do wymienionej w poprzedniem twierdzeniu stałej całkowania, t. j. w stosunku do odciętej punktu styczności z całką osobliwą. Dowód wypadłby znacznie prościej, gdybyśmy przyjęli założenia (S_3). Sądzimy jednak, iż będzie właściwiej podać ten dowód w przypadku ogólniejszym. Prócz założeń (S_2), przyjmiemy mianowicie tylko dodatkowe założenie iż pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji $f(x, y, p)$ spełniają warunek Lipschitza z dowolnym wykładnikiem dodatnim, t. j. że jeśli $g(x, y, p)$ oznacza jedną z tych pochodnych cząstkowych, wówczas zachodzi w otoczeniu elementu (x_0, y_0, p_0) identycznie nierówność

$$|g(x_2, y_2, p_2) - g(x_1, y_1, p_1)| \leqq K(|x_2 - x_1|^\varrho + |y_2 - y_1|^\varrho + |p_2 - p_1|^\varrho),$$

gdzie K i ϱ są to pewne stałe dodatnie.

Oznaczenie założeń. — *Powyższe założenia oznaczymy przez* (S_2').

Zanim przystąpimy do właściwego twierdzenia, które nas obchodzi, udowodnimy lemat następujący:

Lemat 3. — *Niech funcje $\lambda(t)$ i $\mu(t)$ będą klasy $C^{(1)}$ w otoczeniu jakiegoś punktu $t = t_0$; niech nadto będzie*

$$\lambda(t_0) = 0 \quad i \quad \nu'(t_0) = 0, \quad ale \quad \mu'(t_0) \neq 0$$

a pochodne tych funkcyj niechaj spełniają identycznie nierówności:

$$\begin{cases} |\lambda'(t) - \lambda'(t_0)| \leqq K|t - t_0|^\varrho, \\ |\mu'(t) - \mu'(t_0)| \leqq K|t - t_0|^\varrho, \end{cases}$$

gdzie litery K i ϱ oznaczają stałe dodatnie. Jeżeli wówczas położymy:

$$\left| \begin{aligned} &\omega(t) = \frac{\lambda(t)}{\mu(t)} \quad \text{dla } t \neq t_0, \\ &\omega(t_0) = \frac{\lambda'(t_0)}{\mu'(t_0)} \end{aligned} \right.$$

funkcja $w(t)$ spełniać będzie identycznie nierówność postaci

$$|\omega(t) - \omega(t_0)| \leqq L|t - t_0|^\varrho,$$

gdzie L jest stałą dodatnią, dającą się określić wymiernie w zależności od wielkości $\lambda'(t_0)$, $\mu'(t_0)$ i K.

Dowód. — Jak wiadomo, jest wówczas dla $t \neq t_0$,

$$\omega(t) = \frac{\lambda'(t_0 + \theta[t - t_0])}{\mu'(t_0 + \theta[t - t_0])},$$

gdzie liczba θ czyni zadość nierównościom

$$0 < \theta < 1;$$

wystarczy teraz w powyższem wyrażeniu oszacować różnice

$$|\lambda'(t_0 + \theta[t - t_0]) - \lambda'(t_0)| \quad \text{i} \quad |\mu'(t_0 + \theta[t - t_0]) - \mu'(t_0)|$$

według założonych przez nas nierówności, aby móc natychmiast otrzymać nierówność, o którą chodzi i efektywnie wyrazić współczynnik L.

Jednem z zastosowań powyższego lematu jest lemat następujący:

Lemat 4. *W założeniach* (S_2'), *w otoczeniu elementu* (x_0, y_0, p_0) *na każdej całce nieosobliwej spełniona jest identycznie nierówność*

$$|p'(x) - p'(\xi)| \leqq N|x - \xi|^\varrho,$$

gdzie liczba N *jest stałą, mogącą być wybraną wspólnie dla całego powyższego otoczenia.*

Dowód. Łatwo sprawdzić, iż w naszych założeniach, funkcja $H(x, p)$, wprowadzona w § 3, czyni zadość, jako funkcja zmiennej p, warunkom lematu 3. Mamy przeto

$$|p'(x) - H\{x, \varphi'(x)\}| \leqq L_1 |p(x) - \varphi'(x)|^\varrho,$$

gdzie L_1 jest jakąś stałą. Ze sposobu, w jaki się tę stałę wyznacza, i z ciągłości występujących w wyrażeniu funkcji $H(x, p)$ pochodnych funkcji $f(x, y, p)$, wynika, iż liczba L_1 może być obrana wspólnie dla wszystkich całek nieosobliwych w rozważanem otoczeniu. Ponieważ jednak stosunek

$$\frac{|p(x) - \varphi'(x)|}{|x - \xi|}$$

gdzie, przypominamy to, $p(x)$ oznacza pochodnę $\frac{dy}{dx}$ tej całki nieosobliwej równania $f(x, \varphi, y') = 0$, która w punkcie $x = \xi$ styczna jest do całki osobliwej, jest oczywiście ograniczony, możemy, wprowadzając nową stałę, L_2, napisać

$$\text{(d)} \qquad |p'(x) - H\{x, \varphi'(x)\}| \leqq L_2 |x - \xi|^\varrho.$$

Z drugiej strony, jasnem jest, iż funkcja złożona zmiennej x, $H\{x, \varphi'(x)\}$, czyni również zadość warunkowi postaci

$$|H\{x_2, \varphi'(x_2)\} - H\{x_1, \varphi'(x_1)\}| \leqq L_3\, |x_2 - x_1|^{\varrho}.$$

gdzie L_3 jest nową stałą. Kładąc w tej ostatniej nierówności

$$x_2 = x, \quad x_1 = \xi,$$

otrzymujemy nierówność, która, wraz z nierównością (d), po uwzględnieniu identyczności

$$p'(\xi) = H\{\xi, \varphi'(\xi)\},$$

daje żądaną nierówność, w której

$$N = L_2 + L_3 .$$

Mamy wreszcie lemat następujący:

L e m a t 5. *W założeniach* (S_2') *połóżmy*

$$T(x, \xi) = \left. \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}} \right|_{\substack{y=y(x,\xi) \\ p=y'_x(x,\xi)}} + \frac{1}{x-\xi};$$

wówczas całka

$$\int_{\xi}^{x} T(u, \xi)\, du$$

jest zbieżna jednostajnie względem parametru ξ.

D o w ó d. — Z definicji funkcji $T(x, \xi)$ mamy

$$T(x, \xi) = \frac{1}{x-\xi} \left\{ 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{x-\xi}{\dfrac{\partial f}{\partial p}} \right\} \Bigg|_{\substack{y=y(x,\xi) \\ p=y'_x(x,\xi)}}$$

Ponieważ — jak widać natychmiast — do ilorazu

$$\left. \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x-\xi)}{\dfrac{\partial f}{\partial p}} \right|_{\substack{y=y(x,\xi) \\ p=y'_x(x,\xi)}}$$

z uwagi na lemat 4, stosuje się lemat 3, zatem wyraz, ujęty

w nawias w ostatniem równaniu, spełnia warunek Lipschitza z wykładnikiem ϱ. Jednakowoż, ponieważ, jak zauważyliśmy w toku dowodu twierdzenia 7, jest

$$\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{N(x)}{x-\xi},$$

gdzie

$$\lim_{x\to\xi} N(x) = -1,$$

przeto

$$\lim_{x\to\xi}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x-\xi)}{\frac{\partial f}{\partial p}}=-1;$$

zatem wspomniany wyraz w nawiasie staje się zerem dla $x=\xi$, wobec czego warunek Lipschitza z wykładnikiem ϱ przybiera postać

$$\left|\frac{1+\frac{\partial f}{\partial y}(x-\xi)}{\frac{\partial f}{\partial p}}\right| \leqq N|x-\xi|^{\varrho},$$

gdzie N oznacza stałę, której, ze względu na sposób wyznaczania jej, można nadać wartość, stosowną dla wszystkich całek nieosobliwych w otoczeniu elementu (x_0, y_0, p_0). Mamy przeto według wzoru, przytoczonego na początku niniejszego dowodu,

$$|T(x,\xi)| \leqq N|x-\xi|^{\varrho-1};$$

stąd wynika bezpośrednio lemat 5.

Teraz jesteśmy w stanie łatwo udowodnić twierdzenie następujące:

Twierdzenie 14. — *W założeniach* (S_2'), *funkcja* $y(x,\xi)$, *oznaczająca, przy danej wartości zmiennej* ξ, *całkę nieosobliwą równania* (1), *przechodzącą przez element* $\{\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)\}$, *posiada pochodnę cząstkową ciągłą względem zmiennej* ξ, *wyrażającą się wzorem*

$$\frac{\partial y(x,\xi)}{\partial \xi}=\left.\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}}\right|_{\substack{x=\xi\\ y=\varphi(\xi)\\ p=\varphi'(\xi)}}\cdot e^{-\int_\xi^x T(u,\xi)\,du}\cdot(x-\xi),$$

gdzie funkcja $T(x,\xi)$ *ma to samo znaczenie, co w lemacie 5.*

Dowód. — Z tych samych względów, co w paru poprzednich dowodach, ograniczymy się wyłącznie do wartości zmiennej x, większych od liczby ξ. Istnienie bowiem pochodnej równej dla $x = \xi$ jest trywialne; ze wzoru zaś ogólnego, przytoczonego w wypowiedzi twierdzenia, wyniknie natychmiast ciągłość odnośnej pochodnej w tym przypadku. Również zajmiemy się bezpośrednio uzasadnieniem powyższego wzoru jedynie dla pochodnej lewostronnej. Prawa strona tego wzoru jest bowiem, ze względu na lemat 5, oczywiście ciągła. Otóż znane twierdzenie powiada, że w punkcie, w którym funkcja jakaś nie jest różniczkowalna, żadna z jej czterech funkcyj pochodnych nie jest ciągłą; wobec tego, przez kontrapozycję, z ciągłości pochodnej lewostronnej, wnioskujemy o istnieniu pochodnej równej naturalnie pochodnej lewostronnej, i tem samej ciągłej.

Niech będzie teraz ξ_1 jakaś wartość zmiennej ξ, położona w określonym w twierdzeniu 10 przedziale $(x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha)$; będziemy teraz rozważali całkę $y(x, \xi)$ dla wartości parametru ξ, położonych w przedziale $(x_0 - \alpha,\ \xi_1)$. Całka taka może jednak również być określana przez wartość η_1, jaką zmienna y przybiera dla $x = \xi_1$ a pochodna $\frac{\partial y}{\partial \eta_1}$, uwzględniając definicję funkcji $T(x, \xi)$, da się wyrazić wzorem następującym:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta_1} = e^{\int\limits_{\xi_1}^{x} \left\{ \frac{1}{u - \xi_1} - T(u, \xi) \right\} du};$$

czyli

$$\frac{\partial y}{\partial \eta_1} = \frac{x - \xi}{\xi_1 - \xi}\, e^{-\int\limits_{\xi_1}^{x} T(u, \xi)\, du}$$

Zamiast wartości zmiennej y dla $x = \xi_1$, można jednak za warunek początkowy przyjąć wartość p_1 zmiennej p przy tej samej wartości zmiennej niezależnej. Ponieważ zaś na powierzchni $f(x, y, p) = 0$ mamy

$$\frac{\partial y}{\partial p} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

otrzymujemy na pochodnę względem parametru p_1 wzór taki:

$$\frac{\partial y}{\partial p_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial p}}{(\xi_1 - \xi)\frac{\partial f}{\partial y}} e^{-\int_{\xi_1}^{x} T(u,\xi)\,du} (x - \xi),$$

gdzie we współczynniku na początku prawej strony pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y, p)$ wzięte są w punkcie $x = \xi$ rozważanej całki.

Ponieważ, jak już zauważyliśmy w dowodzie twierdzenia 7, jest na każdej całce

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{N(x)}{x - \xi},$$

gdzie $N(x)$ dąży do liczby -1 w punkcie $x = \xi$, otrzymujemy przez przejście do granicy

$$\left.\frac{\partial y}{\partial p_1}\right|_{p=\varphi'(\xi_0)} = e^{-\int_{\xi}^{x} T(u,\xi)\,du} \cdot (x - \xi),$$

przyczem wzór ten określa narazie pochodnę jednostronną.

Ponieważ dalej, jak można łatwo wywnioskować z twierdzenia 6 istnieje dla $\xi = \xi_1$, pochodna

$$\frac{\partial p_1}{\partial \xi} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}}$$

twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej daje nam, przy uwzględnieniu poprzedniego wzoru, wzór, podany w twierdzeniu 14, jako wzór na pochodnę lewostronną. Wobec jednak uwagi, uczynionej na wstępie niniejszego dowodu, twierdzenie jest w całości udowodnione.

Uwaga 3. Z powyższego twierdzenia otrzymujemy odrazu, pod temi samemi założeniami (S_2'), uzasadnione w § 3 (twierdzenie 9) pod założeniami (S_3), wzory na pochodne cząstkowe funkcji całkowej względem współrzędnych punktu początkowego w przypadku, gdy na całce oddziela go od punktu bieżącego punkt styczności z całką osobliwą.

Kończąc, uważam za swój miły obowiązek wyrażenie Panu Profesorowi W. Wilkoszowi prawdziwej wdzięczności za życzliwe rady, których mi łaskawie udzielał, zwłaszcza w początkowych fazach mojej pracy.
